บทที่ 5
สมการเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

สมการเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบ

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$ เมื่อ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงตัว โดยที่ $a_n \neq 0$

หรือเขียนอยู่ในรูปตัวดำเนินการได้เป็น

$$P(D)\,y = 0 \qquad (1)$$

เมื่อ $P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$

ผลเฉลยของสมการ(1) ต้องเป็นฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติ ว่าการรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันอันดับ 1 ถึงอันดับ n มีค่าเป็น 0 ซึ่งฟังก์ชันดังกล่าวควรเป็นฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติที่ทำให้อนุพันธ์ของฟังก์ชันเท่ากับค่าคงตัวคูณ ฟังก์ชันเดิม

นั่นคือ $$\frac{d^k f}{dx^k} = cf \qquad k = 1, 2, \ldots$$

ฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติดังกล่าวมีฟังก์ชันเอ๊กซ์โปเนนเชียล คือ $f(x) = e^{rx}$ เมื่อ r เป็นค่าคงตัว และสังเกตว่าถ้าแทนค่า $y = e^{rx}$ ในสมการ (1) เราจะได้

$$P(D)e^{rx} = 0$$

$$e^{rx} P(r) = 0$$

และเนื่องจาก $e^{rx} \neq 0$ ดังนั้น $y = e^{rx}$ จะเป็นผลเฉลยของสมการ (1)

ถ้า r เป็นผลเฉลยของสมการพหุนาม

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0 \qquad (2)$$

ซึ่งจะเรียกสมการ (2) นี้ว่า **สมการช่วย (Characteristic equation or auxiliary equation)** ของสมการ (1) เนื่องจาก P(r) เป็นพหุนาม ระดับขั้น n ซึ่งจะมีรากได้ไม่เกิน n ราก ซึ่งจะพิจารณา 3 กรณี คือ

กรณีที่ 1 รากทุกตัวเป็นจำนวนจริงที่ มีค่าต่างกันทั้งหมด

กรณีที่ 2 รากทุกตัวเป็นจำนวนจริงที่ มีบางรากมีค่าเท่ากัน (ค่าซ้ำกัน)

กรณีที่ 3 รากเป็นจำนวนเชิงซ้อน

กรณีที่ 1 รากของสมการช่วยที่มีค่าต่างกันทั้งหมด

ให้ $r_1, r_2, ..., r_n$ เป็นรากที่เป็นจำนวนจริงต่างกันทั้งหมดของสมการช่วย P(r) = 0

ดังนั้น $y_1 = e^{r_1 x}, y2 = e^{r_2 x}, ..., y_n = e^{r_n x}$ ต่างเป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ P(D)y = 0

ต่อไปจะแสดงว่า $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, ..., e^{r_n x}$ เป็นอิสสระเชิงเส้นต่อกันทุกค่า x

ให้ $r_1, r_2, ..., r_n$ เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน ที่ $r_1 < r_2 < ... < r_n$ และ $c_1, c_2, ..., c_n$ เป็นจำนวนจริงที่ทำให้

$$c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + ... + c_n e^{r_n x} = 0 \quad \text{ทุก x ที่เป็นจำนวนจริง}$$

นำ $e^{-r_n x}$ คูณตลอด จะได้ $c_1 e^{(r_1 - r_n)x} + c_2 e^{(r_2 - r_2)x} + ... + c_{n-1} e^{(r_{n-1} - r_n)x} + c_n = 0$

หาลิมิต เมื่อ x เข้าใกล้ ∞ จะได้ $c_n = 0$

ในทำนองเดียวกัน นำ $e^{-r_{n-1} x}$ คูณตลอด จะได้ $c_{n-1} = 0$

ทำในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $c_1, c_2, ..., c_n = 0$

นั่นคือ $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, ..., e^{r_n x}$ เป็นอิสสระเชิงเส้นต่อกันทุกค่า x ที่เป็นจำนวนจริง

จึงทำให้ได้ ทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.1 สมการเอกพันธ์ P(D)y = 0

ถ้ามี $r_1, r_2, ..., r_n$ เป็นรากที่เป็นจำนวนจริงต่างกันทั้งหมดของสมการช่วย P(r) = 0

แล้ว ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + ... + c_n e^{r_n x}$ เมื่อ $c_1, c_2, ..., c_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 5.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{d^2 y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

วิธีทำ จากสมการอนุพันธ์ จะมีสมการช่วยคือ $r^2 - 3r + 2 = 0$

$$(r - 1)(r - 2) = 0$$

$$r = 1, 2$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ #

กรณีที่ 2 รากของสมการช่วยที่รากทุกตัวเป็นจำนวนจริงและมีบางรากมีค่าเท่ากัน (ค่าซ้ำกัน)

พิจารณา $P(D)y = (D - a)^n y = 0$ ซึ่งจะมีสมการช่วย $P(r) = (r - a)^n = 0$ มีผลเฉลยคือ $r = a,a,..., a$ (n ตัว)

ดังนั้นจะได้ $y = e^{ax}$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการอนุพันธ์ $(D - a)^n y = 0$ แต่ไม่ใช่ผลเฉลยทั่วไป

โดย ทฤษฎีบท 4.1.5 ให้ $y = ve^{ax}$ แทนในสมการ $(D - a)^n y = 0$ ได้

$0 = (D - a)^n ve^{ax} = e^{ax} D^n v$ (ตามคุณสมบัติข้อ (2) ในหัวข้อ 4.3)

ซึ่งสมการจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $D^n v = 0$ และ

$D^n v = 0$ ก็ต่อเมื่อ $v = c_1 + c_2 x + ...+ c_n x^{n-1}$ เมื่อ $c_1, c_2,..., c_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ดังนั้น $y = (c_1 + c_2 x,..., c_n x^{n-1})e^{ax}$ เป็นผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ $(D - a)^n y = 0$

ต่อไปจะแสดงว่า $e^{ax}, xe^{ax},...x^{n-1}e^{ax}$ เป็นอิสสระเชิงเส้นต่อกันทุกค่า x ที่เป็นจำนวนจริง

ให้ $c_1, c_2,..., c_n$ เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $c_1 e^{ax} + c_2 xe^{ax} + ... + c_n x^{n-1}e^{ax} = 0$

$$(c_1 + c_2 x + ... + c_n x^{n-1})e^{ax} = 0$$

เนื่องจาก $e^{ax} \neq 0$ จะได้ว่า $c_1 + c_2 x + ... + c_n x^{n-1} = 0$

จาก แบบฝึกหัด 4.1 ข้อ 8 จะได้ว่า $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$

นั่นคือ $e^{ax}, xe^{ax},...x^{n-1}e^{ax}$ เป็นอิสสระเชิงเส้นต่อกันทุกค่า x ที่เป็นจำนวนจริง

จึงทำให้ได้ ทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.2 สมการเอกพันธ์ $P(D)y = (D - a)^n y = 0$ ซึ่งมีสมการช่วย $P(r) = (r - a)^n = 0$

จะมีผลเฉลยทั่วไปคือ $y = (c_1 + c_2 x + ... + c_n x^{n-1})e^{ax}$ เมื่อ $c_1, c_2,..., c_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

จาก ทฤษฎีบท 5.1 และ ทฤษฎีบท 5.2 ทำให้ได้ว่า ถ้า สมการเอกพันธ์ $P(D)y = 0$ อยู่ในรูป $Q(D)(D - a)^m y = 0$ ซึ่งมีสมการช่วย $P(r) = Q(r)(r - a)^m = 0$ โดยที่ $a, r_1, r_2,..., r_k$ เป็นรากที่เป็นจำนวนจริงต่างกันทั้งหมดและ a เป็นรากที่ซ้ำกัน m ค่า ซึ่ง $m + k = n$ แล้วผลเฉลยทั่วไปคือ

$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + ... + c_k e^{r_k x} + (c_{k+1} + c_{k+2} x + ... + c_n x^{m-1})e^{ax}$ เมื่อ $c_1, c_2,..., c_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 5.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 4\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 18y = 0$

วิธีทำ จากสมการอนุพันธ์ จะมีสมการช่วยคือ $r^3 - 4r^2 - 3r + 18 = 0$

$$(r + 2)(r - 3)^2 = 0$$

$$r = -2, 3, 3$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1 e^{-2x} + (c_2 + c_3 x)e^{3x}$ #

กรณีที่ 3 รากเป็นจำนวนเชิงซ้อน

ถ้าสมการช่วย $P(r) = 0$ มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง และ $i = \sqrt{-1}$ และเนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ P(r) เป็นจำนวนจริง เราจะได้ว่า สังยุค(conjugate) ของ $a + bi$ คือ $a - bi$ เป็นรากของ $P(r) = 0$ ด้วย ดังนั้นในส่วนของรากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อนจะมีผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$P(D)y = 0$ เป็น $$y = c_1e^{(a+bi)x} + c_2e^{(a-bi)x}$$

และโดยเอกลักษณ์ของออยเลอร์ (Euler identity) ดังนี้

$$e^{iq} = \cos q + i\sin q \ , \quad e^{-iq} = \cos q - i\sin q$$

จะได้
$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{(a+bi)x} + c_2 e^{(a-bi)x} \\ &= c_1 e^{ax} e^{ibx} + c_2 e^{ax} e^{-bxi} \\ &= e^{ax}[c_1 (\cos bx + i\sin bx) + c_2 (\cos bx - i\sin bx)] \\ &= e^{ax}[(c_1 + c_2)\cos bx + i(c_1 - c_2)\sin bx] \\ &= e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx) \quad \text{โดยที่ } A = c_1 + c_2 \text{ และ } B = i(c_1 - c_2) \end{aligned}$$

เพื่อที่ผลเฉลยส่วนนี้ คือ $e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$ จะเป็นจำนวนจริง ค่าของ A และ B ต้องเป็นจำนวนจริง ซึ่งจะเป็นจริงได้เมื่อ c_1 กับ c_2 ต้องเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สังยุคกัน แต่อย่างไรก็ตามเราอาจพิสูจน์โดยตรงได้ว่า สำหรับสมการช่วย $P(r) = 0$ มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ และ $a - bi$ แล้ว $e^{ax}\cos bx$ และ $e^{ax}\sin bx$ เป็นผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ $P(D)y = 0$ ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.3 สมการเอกพันธ์ $P(D)y = ((D - a)^2+b^2)y = 0$ เมื่อ $b \neq 0$ ซึ่งมีสมการช่วย $P(r) = (r - a)^2 + b^2 = 0$ ซึ่งมีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ และ $a - bi$ จะมีผลเฉลยทั่วไปคือ $y = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$ เมื่อ A, B เป็นค่าคงตัวใด ๆ

พิสูจน์ จาก
$$\begin{aligned} ((D-a)^2 + b^2)e^{ax}\cos bx &= (D-a)^2 e^{ax}\cos bx + b^2 e^{ax}\cos bx \\ &= (D-a)(D-a)e^{ax}\cos bx + b^2 e^{ax}\cos bx \\ &= (D-a)e^{ax} D\cos bx + b^2 e^{ax}\cos bx \\ &= (D-a)e^{ax}(-b\sin bx) + b^2 e^{ax}\cos bx \\ &= e^{ax} D(-b\sin bx) + b^2 e^{ax}\cos bx \\ &= -b^2 e^{ax}\cos bx + b^2 e^{ax}\cos bx \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $e^{ax}\cos bx$ เป็นผลเฉลยของสมการ

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถแสดงได้ว่า $e^{ax}\sin bx$ เป็นผลเฉลยของสมการด้วย

ต่อไปจะแสดงว่า $e^{ax}\cos bx$ และ $e^{ax}\sin bx$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ให้ c_1, c_2 เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $c_1 e^{ax}\cos bx + c_2 e^{ax}\sin bx = 0$

ดังนั้น $$e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\sin bx) = 0$$

จาก $e^{ax} \neq 0$ จะได้ว่า $c_1 \cos bx + c_2 \sin bx = 0$

และ cos bx และ sin bx เป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้น $c_1 = c_2 = 0$

นั่นคือ ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = e^{ax}(A \cos bx + B \sin bx)$ เมื่อ A, B เป็นค่าคงตัวใด ๆ #

ในกรณีที่สมการช่วย $P(r) = 0$ มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ ซ้ำกัน k ราก ก็จะมีรากเป็น จำนวนเชิงซ้อน $a - bi$ ซ้ำกัน k รากด้วย ดังนั้นจะมีผลเฉลยส่วนที่สมนัยกับราก $a + bi$ และ $a - bi$ ดังนี้

$$y = (c_{11} + c_{12}x + \ldots + c_{1k}x^{k-1})e^{(a+bi)x} + (c_{21} + c_{22}x + \ldots + c_{2k}x^{k-1})e^{(a-bi)x}$$

$$= e^{ax}(c_{11} + c_{12}x + \ldots + c_{1k}x^{k-1})(\cos bx + i \sin bx) + e^{ax}[c_{21} + c_{22}x + \ldots + c_{2k}x^{k-1}](\cos bx - i \sin bx)$$

$$= e^{ax}[(A_1 + A_2x + \ldots + A_kx^{k-1})\cos bx + (B_1 + B_2x + \ldots + B_kx^{k-1})\sin bx]$$

โดย $A_j = c_{1j} + c_{2j}$ และ $B_j = i(c_{1j} - c_{2j})$, $j = 1, 2, \ldots, k$

ตัวอย่าง 5.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^2 + 1)y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ $r^2 + 1 = 0$

$r = i, -i$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไป คือ $y = A \cos x + B \sin x$ #

ตัวอย่าง 5.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^{3-} 3D^2 + 9D + 13)y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ $r^3 - 3r^2 + 9r + 13 = 0$

$(r + 1)(r^2 - 4r + 13) = 0$

$r = -1, 2 + 3i, 2 - 3i$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไป คือ $y = c_1e^{-x} + e^{2x}(c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x)$ #

ตัวอย่าง 5.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^7 + 8D^5 + 16D^3)y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ $r^7 + 8r^5 + 16r^3 = 0$

$r^3(r^4 + 8r^2 + 16) = 0$

$r^3(r^2 + 4)^2 = 0$

$r = 0, 0, 0, 2i, 2i, -2i, -2i$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไป คือ $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + (c_4 + c_5x)\cos 2x + (c_6 + c_7x)\sin 2x$ #

แบบฝึกหัด 5

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการในข้อ 1. ถึงข้อ 24

1.	$(D^2 - 5D + 6)y = 0$	2.	$(D^2 - 2D - 3)y = 0$
3.	$(4D^2 - 12D + 5)y = 0$	4.	$(3D^2 - 14D - 5)y = 0$
5.	$(D^3 - 3D^2 - D + 3)y = 0$	6.	$(D^3 - 6D^2 + 5D + 12)y = 0$
7.	$(D^2 - 8D + 16)y = 0$	8.	$(4D^2 + 4D + 1)y = 0$
9.	$(D^2 - 4D - 13)y = 0$	10.	$(D^2 + 6D + 25)y = 0$
11.	$(D^2 + 9)y = 0$	12.	$(4D^2 + 1)y = 0$
13.	$(D^3 - 5D^2 + 7D - 3)y = 0$	14.	$(4D^3 + 4D^2 - 7D + 2)y = 0$
15.	$(D^3 - 6D^2 + 12D - 8)y = 0$	16.	$(D^3 + 4D^2 + 5D + 6)y = 0$
17.	$(D^3 - D^2 + D - 1)y = 0$	18.	$(D^4 + 8D^2 + 16)y = 0$
19.	$(D^5 - 2D^4 + D^3)y = 0$	20.	$(D^4 - D^3 - 3D^2 + D + 2)y = 0$
21.	$(D^4 - 3D^3 - 2D^2 + 2D + 12)y = 0$	22.	$(D^4 + 6D^3 + 15D^2 + 20D + 12)y = 0$
23.	$(D^4 + 1)y = 0$	24.	$(D^5)y = 0$

จงหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นในข้อ 25. ถึงข้อ 30

25. $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -7$, $y''(0) = -1$

26. $(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$

27. $(D^3 - 2D^2 + 4D - 8)y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

28. $(D^3 - 3D^2 + 4)y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -8$, $y''(0) = -4$

29. $(D^3 - 5D^2 + 9D - 5)y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 6$

30. $(D^4 + 3D^3 + 2D^2)y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = -6$, $y'''(0) = 14$