บทที่ 6
สมการไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

สมการไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบ

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ เมื่อ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงตัว โดยที่ $a_n \neq 0$

และ f(x) เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงใดช่วงหนึ่งของจำนวนจริง และ $f(x) \neq 0$

หรือเขียนอยู่ในรูปตัวดำเนินการได้เป็น $P(D)\,y = f(x)$

เมื่อ $P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$

สมการ (1) มีผลเฉลยดังได้กล่าวมาในทฤษฎีบท 4.2.2 คือ $y = y_c + y_p$

y_c เรียกผลเฉลยเติมเต็ม ซึ่งก็คือผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์สัมพัทธ์ของสมการ (1) (P(D)y = 0)ซึ่งเรียนมาแล้วในบทที่ 5

ส่วน y_p เรียกผลเฉลยเฉพาะของสมการและจะกล่าวถึงการหาในบทนี้

การหาผลเฉลยเฉพาะ y_p ในบทนี้จะกล่าวถึง 3 วิธีด้วยกัน คือ

(1) การหาผลเฉลยเฉพาะโดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (undetermined coefficients)

(2) การหาผลเฉลยเฉพาะด้วยตัวดำเนินการผกผัน (inverse operator)

(3) การหาผลเฉลยเฉพาะด้วยวิธีแปรตัวแปรเสริม (variation of parameters)

6.1 การหาผลเฉลยเฉพาะโดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

การหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธ์โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์นี้จะทำได้เฉพาะเมื่อ ฟังก์ชัน f(x) ในสมการ P(D)y = f(x) เป็นฟังก์ชันในรูปแบบ x^n, e^{ax} ,cos bx , sin bx และหรือผลคูณ หรือผลบวกของฟังก์ชันเหล่านี้เท่านั้น ถ้าหาก f(x) ไม่อยู่ในรูปแบบนี้จะหาผลเฉลยโดยวิธีเทียบ สัมประสิทธิ์นี้ไม่ได้

หลักการคือจะพยายามแปลงสมการ P(D)y = f(x) ไปเป็นสมการเอกพันธ์ Q(D)y = 0

ปัญหาคือเราต้องหาตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ที่จะกระทำ f(x) แล้วได้ 0

โดยการพิจารณาขบวนการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ทำให้ทราบว่า

ถ้า f(x) มีพจน์ x^{k-1} เราสามารถใช้ตัวดำเนินการ D^k ดำเนินการกับ f(x) แล้วจะได้ 0

f(x) มีพจน์ e^{ax} เราสามารถใช้ตัวดำเนินการ D - a ดำเนินการกับ f(x) แล้วจะได้ 0

f(x) มีพจน์ $x^{k-1} e^{ax}$ เราสามารถใช้ตัวดำเนินการ $(D - a)^k$ ดำเนินการกับ f(x) แล้วจะได้ 0

f(x) มีพจน์ $e^{ax}\cos bx$ และหรือ $e^{ax}\sin bx$ เราสามารถใช้ตัวดำเนินการ

$[D - (a + bi)][D - (a - bi)]$ หรือก็คือ $[(D - a)^2 + b^2]$ ดำเนินการกับ f(x) แล้วจะได้ 0

f(x) มีพจน์ $x^{k-1} e^{ax}\cos bx$ และหรือ $x^{k-1} e^{ax}\sin bx$ เราสามารถใช้ตัวดำเนินการ

$[(D - a)^2 + b^2]^k$ ดำเนินการกับ f(x) แล้วจะได้ 0

ตัวอย่าง 6.1.1

(1) $f(x) = 4e^{2x} - 3x$ แล้ว $(D-2)D^2 f(x) = 0$

(2) $f(x) = 1 + 4xe^{x} + \sin 3x$ แล้ว $D(D-1)^2(D^2+9)f(x) = 0$

(3) $f(x) = -2x\,e^{2x}\cos 5x$ แล้ว $[(D-2)^2 + 25]^2 f(x) = 0$ #

พิจารณาสมการไม่เอกพันธ์

$$P(D)\,y = f(x) \qquad (1)$$

มีสมการเอกพันธ์สัมพัทธ์เป็น

$$P(D)\,y = 0 \qquad (2)$$

สมการช่วยของ (2) คือ $P(r) = 0$

สมมติมีรากของสมการช่วย คือ $r = r_1, r_2, \ldots, r_n$ ก็จะได้ผลเฉลยเติมเต็ม y_c ซึ่งก็คือผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2)

ในการหา y_p

นำ Q(D) ซึ่งเป็นตัวดำเนินการ ดำเนินการกับ f(x) แล้วได้ 0 ดำเนินการในสมการ (1) ได้

$$Q(D)\,P(D)\,y = Q(D)\,f(x) = 0 \qquad (3)$$

สมการ (3) มีสมการช่วย $Q(r)\,P(r) = 0$ ซึ่งจะมีรากเป็น

$$r = r_1, r_2, \ldots, r_n, s_1, s_2, \ldots, s_k$$

ดังนั้น สมการ (3) มีผลเฉลย 2 ชุดรวมกัน คือชุดที่ได้จาก $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ซึ่งคือผลเฉลย y_c กับอีกชุดได้จาก $s_1, s_2, \ldots, s_k$ เรียกผลเฉลยชุดนี้ว่า y_q นั่นคือ ผลเฉลยของสมการ (3)คือ

$$y = y_c + y_q$$

พิจารณา y_p ผลเฉลยเฉพาะของสมการ (1) จะเห็นได้ว่า

$$Q(D)\,P(D)\,y_p = Q(D)\,f(x) = 0$$

ดังนั้นจะเห็นว่า y_p ก็เป็นผลเฉลยของสมการ (3) ด้วย ดังนั้น y_p สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกของ $y_c + y_q$ แต่เนื่อง จาก y_p เป็นอิสระเชิงเส้นกับ y_c ทำให้ได้ว่า y_p สามารถหาได้จาก y_q โดยการหาค่าคงตัวที่สอดคล้องสมการ

$$P(D)y_q = f(x)$$

ตัวอย่าง 6.1.2 จงหาผลเฉลยของสมการ $(D^2+4)\,y = 5e^x$

วิธีทำ สมการเอกพันธ์สัมพัทธ์ คือ $(D^2+4)\,y = 0$

มีสมการช่วยเป็น $r^2 + 4 = 0$

$r = \pm 2i$

ดังนั้นได้ $y_c = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$

เนื่องจาก $f(x) = 5e^x$

ดังนั้นสมการ $Q(D)\,P(D)\,y = Q(D)\,f(x) = 0$ จึงได้เป็น

$(D-1)(D^2+4)\,y = (D-1)(5e^x) = 0$

มีสมการช่วย $(r-1)(r^2+4) = 0$

$r = \pm 2i, 1$

จะได้ผลเฉลยของสมการ $Q(D)\,P(D)\,y = 0$ เป็น

$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + c_3e^x$

แต่ $y = y_c + y_q$ และ $y_c = c_1\cos 2x + c2\sin 2x$

ดังนั้น $y_q = c_3e^x$

หาค่า c3 จากสมการ $(D^2+4)\,y_q = 5e^x$

ดังนั้น $5c_3\,e^x = 5e^x$

เทียบสัมประสิทธิ์ได้ $c_3 = 1$

ดังนั้นได้ผลเฉลยเฉพาะ คือ $y_p = e^x$

และผลเฉลยทั่วไปเป็น $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + e^x$ #

ตัวอย่าง 6.1.3 จงหาผลเฉลยของสมการ $(D^2+4)\,y = 4x^2$

วิธีทำ สมการเอกพันธ์สัมพัทธ์ คือ $(D^2+4)\,y = 0$

มีสมการช่วยเป็น $r^2 + 4 = 0$

$r = \pm 2i$

ดังนั้นได้ $y_c = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$

เนื่องจาก $f(x) = 4x^2$

ดังนั้นสมการ $Q(D)\,P(D)\,y = Q(D)\,f(x) = 0$

จึงได้เป็น $(D^3)(D^2+4)\,y = (D^3)(4x^2) = 0$

มีสมการช่วย $(r^3)(r^2+4) = 0$

$r = \pm 2i, 0, 0, 0$

จะได้ผลเฉลยของสมการ $Q(D)\,P(D)\,y = 0$

เป็น $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + c_3 + c_4 x + c_5 x^2$

แต่ $y = y_c + y_q$ และ $y_c = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$

ดังนั้น $y_q = c_3 + c_4 x + c_5 x^2$

หาค่า c_3 , c_4 , c_5 จากสมการ $(D^2 + 4)\, y_q = 4x^2$

ดังนั้น $2c_5 + 4c_3 + 4c_4 x + 4c_5 x^2 = 4x^2$

เทียบสัมประสิทธิ์ได้ $2c_5 + 4c_3 = 0$

$4c_4 = 0$

$4c_5 = 4$

ซึ่งจะได้ $c_3 = -\dfrac{1}{2}$, $c_4 = 0$, $c_5 = 1$

ดังนั้นได้ผลเฉลยเฉพาะ คือ $y_p = -\dfrac{1}{2} + x^2$

และผลเฉลยทั่วไปเป็น $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \dfrac{1}{2} + x^2$ #

ตัวอย่าง 6.1.4 จงหาผลเฉลยของสมการ $(D^2 - 3D - 4)y = 16x - 50 \cos 3x$

วิธีทำ สมการเอกพันธ์สัมพัทธ์ คือ $(D^2 - 3D - 4)y = 0$

สมการช่วย คือ $(r^2 - 3r - 4) = 0$ หรือ $(r + 1)(r - 4) = 0$

$r = -1 ,4$

ดังนั้น $y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}$

เนื่องจาก $f(x) = 16x - 50 \cos 3x$

ดังนั้นสมการ $Q(D)\, P(D)\, y = Q(D)\, f(x) = 0$ คือ

$D^2(D^2 + 9)(D + 1)(D - 4)y = D^2(D^2 + 9)(16x - 50 \cos 3x) = 0$

มีสมการช่วย $r^2(r^2 + 9)(r + 1)(r - 4) = 0$

$r = 0 , 0 , \pm 3i , -1 , 4$

ดังนั้นมีผลเฉลย $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{4x} + c_3 + c_4 x + c_5\cos 3x + c_6\sin 3x$

ดังนั้น $y_q = c_3 + c_4 x + c_5\cos 3x + c_6\sin 3x$

หา $y_q' = c_4 - 3c_5\sin 3x + 3c_6 \cos 3x$

และ $y_q'' = - 9c_5\cos 3x - 9c_6 \sin 3x$

หาค่า c_3 , c_4 , c_5 จากสมการ $(D^2 - 3D - 4)y_q = 16x - 50 \cos 3x$

ดังนั้น

$$- 9c_5\cos 3x - 9c_6 \sin 3x - 3c_4 + 9c_5\sin 3x - 9c_6 \cos 3x - 4 c_3 - 4 c_4 x - 4c_5\cos 3x - 4c_6\sin 3x$$

$$= 16x - 50 \cos 3x$$

หรือ $-4c_3 - 3c_4 - 4c_4x - (13c_5 + 9c_6)\cos 3x + (9c_5 - 13c_6)\sin 3x = 16x - 50\cos 3x$

เทียบสัมประสิทธิ์ได้ $-4c_3 - 3c_4 = 0$

$-4c_4 = 16$

$-13c_5 - 9c_6 = -50$

$9c_5 - 13c_6 = 0$

ซึ่งจะได้ $c_3 = 3,\ c_4 = -4,\ c_5 = \frac{13}{5},\ c_6 = \frac{9}{5}$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะ $y_p = 3 - 4x + \frac{13}{5}\cos 3x + \frac{9}{5}\sin 3x$

ผลเฉลยทั่วไป $y = c_1e^x + c_2e^{4x} + 3 - 4x + \frac{13}{5}\cos 3x + \frac{9}{5}\sin 3x$ #

ตัวอย่าง 6.1.5 จงหาผลเฉลยของสมการ $(D^4 + D^2)y = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$

วิธีทำ สมการเอกพันธ์สัมพัทธ์ คือ $(D^4 + D^2)y = 0$

สมการช่วย คือ $(r^4 + r^2) = 0$ หรือ $r^2(r^2+1) = 0$

$r = 0, 0, \pm i$

ดังนั้น $y_c = c_1 + c_2x + c_3\sin x + c_4\cos x$

เนื่องจาก $f(x) = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$

ดังนั้นสมการ $Q(D)P(D)y = Q(D)f(x) = 0$ คือ

$D^3(D^2+1)(D^4 + D^2)y = D^3(D^2+1)(3x^2 + 4\sin x - 2\cos x) = 0$

มีสมการช่วย $r^3(r^2+1)(r^4+r^2) = 0$

$r = 0, 0, 0, 0, 0, \pm i, \pm i$

ดังนั้นมีผลเฉลย $y = c_1 + c_2x + c_3\sin x + c_4\cos x + c_5x^2 + c_6x^3 + c_7x^4 + c_8 x\cos x + c_9 x\sin x$

ดังนั้น $y_q = c_5x^2 + c_6x^3 + c_7x^4 + c_8 x\cos x + c_9 x\sin x$

เพื่อความสดวกให้ $y_q = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + D x\cos x + E x\sin x$ เมื่อ A , B, C, D, E เป็นค่าคงตัว

หา $y_q' = 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3 + D\cos x - D x\sin x + E\sin x + E x\cos x$

$y_q'' = 2A + 6Bx + 12Cx^2 - 2D\sin x - Dx\cos x + 2E\cos x - Ex\sin x$

$y_q''' = 6B + 24Cx - 3D\cos x + Dx\sin x - 3E\sin x - Ex\cos x$

และ $y_q^{(4)} = 24C + 4D\sin x + Dx\cos x - 4E\cos x + Ex\sin x$

หาค่า A,B, C, D, E จากสมการ $(D^4 + D^2)y_q = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$

ดังนั้น $24C + 4D\sin x + Dx\cos x - 4E\cos x + Ex\sin x + 2A + 6Bx + 12Cx^2 - 2D\sin x - Dx\cos x +$
$2E\cos x - Ex\sin x = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$

หรือ $24C + 2A + 6Bx + 12Cx^2 + 2D\sin x - 2E\cos x = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$

เทียบสัมประสิทธิ์ได้ $24C + 2A = 0$

$6B = 0$

$12C = 3$

$2D = 4$

$-2E = -2$

ซึ่งจะได้ $A = -3$, $B = 0$, $C = \frac{1}{4}$, $D = 2$, $E = 1$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะ $y_p = -3x^2 + \frac{1}{4}x^4 + 2x\cos x + x\sin x$

ผลเฉลยทั่วไป $y = c_1 + c_2x + c_3\sin x + c_4\cos x - 3x^2 + \frac{1}{4}x^4 + 2x\cos x + x\sin x$ #

ข้อสังเกต การได้มาซึ่ง y_q เราอาจพิจารณาดังต่อไปนี้

1. ถ้า $f(x)$ มีพจน์พหุนาม $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ แล้ว

   y_q จะมีพจน์ $x^s(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n)$

2. ถ้า $f(x)$ มีพจน์ $P_n(x)e^{ax}$ แล้ว y_q จะมีพจน์ $x^s(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n)e^{ax}$

3. ถ้า $f(x)$ มีพจน์ $P_n(x)e^{ax}\sin bx$ และ หรือ $P_n(x)e^{ax}\cos bx$ แล้ว y_q จะมีพจน์

   $x^s[(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n)e^{ax}\sin bx + (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_nx^n)e^{ax}\cos bx]$

เมื่อ **s เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ และ มีค่าน้อยที่สุดที่ทำให้** y_q ไม่มีพจน์ที่ซ้ำกับ y_c

จากตัวอย่าง 6.1.2 $f(x) = 5e^x$ แล้ว $y_q = x^s(Ae^x)$ และ $s = 0$ เพราะ y_q ไม่มีพจน์ที่ซ้ำกับ y_c

ตัวอย่าง 6.1.3 $f(x) = 4x^2$ แล้ว $yq = x^s(A_0 + A_1x + A_2x^2)$ และ $s = 0$ เพราะ y_q ไม่มีพจน์ที่ซ้ำกับ y_c

ตัวอย่าง 6.1.4 $f(x) = 16x - 50\cos 3x$ แล้ว $y_q = x^s(A_0 + A_1x) + x^r(B_0\cos 3x + B_1\sin 3x)$

และ $s = 0$, $r = 0$ เพราะ y_q ไม่มีพจน์ที่ซ้ำกับ y_c

ตัวอย่าง 6.1.5 $f(x) = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$ แล้ว $y_q = x^s(A_0 + A_1x + A_2x^2) + x^r(B_0\cos x + B_1\sin x)$

และ $s = 2$, $r = 1$ เพราะ y_q มีพจน์ที่ซ้ำกับ y_c

ตัวอย่าง 6.1.6 จงหา y_q จากสมการ $(D-2)^3(D^2+9)y = x^2e^{2x} + x\sin 3x$

วิธีทำ สมการเอกพันธ์สัมพัทธ์ คือ $(D-2)^3(D^2+9)y = 0$

สมการช่วย คือ $(r-2)^3(r^2+9) = 0$

$r = 2, 2, 2, \pm 3i$

ดังนั้น $y_c = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3x^2e^{2x} + c_4\sin 3x + c_5\cos 3x$

เนื่องจาก $f(x) = x^2e^{2x} + x\sin 3x$

ดังนั้น $y_q = x^s(A_0 + A_1x + A_2x^2)e^{2x} + x^r[(B_0 + B_1x)\cos 3x + (C_1 + C_2x)\sin 3x]$

และ $s = 3$, $r = 1$ เพราะ y_q มีพจน์ที่ซ้ำกับ y_c

แบบฝึกหัด 6.1

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการในข้อ 1. ถึงข้อ 16.

1. $(D^2 - 3D + 2)y = 4x^2$
2. $(D^2 - 2D - 8)y = 4e^{2x} - 21e^{-3x}$
3. $(D^2 + 2D + 5)y = 6\sin 2x + 7\cos 2x$
4. $(D^2 + 2D + 2)y = 10\sin 4x$
5. $(D^2 + 2D + 1)y = 7 + 75\sin x$
6. $(D^2 + 4D + 5)y = 50x + 13e^{3x}$
7. $(D^2 - 1)y = e^{-x}(2\sin x + 4\cos x)$
8. $(D^2 - 1)y = 8xe^x$
9. $(D^2 - 1)y = 10\sin 2x$
10. $(D2 + 1)y = 12\cos^2 x)\ x$
11. $(D^3 + 4D^2 + D - 6)y = -18x^2 + 1$
12. $(D^3 + D^2 + 3D - 5)y = 5\sin 2x + 10x2 + 3x + 7$
13. $(4D^3 - 4D^2 - 5D + 3)y = 3x^2 - 8x$
14. $(D^3 - 4D^2 + 5D - 2)y = 3x^2e^x - 7e^x$
15. $(D^4 + 2D^3 - 3D^2)y = 18x^2 + 16x\,e^x + 4e^{3x} - 9$
16. $(D^4 - 5D^3 + 7D^2 - 5D + 6)y = 5\sin x - 12\sin 2x$

จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการในข้อ 17. ถึงข้อ 20.

17. $(D^2 + 3D)y = -18x$ เมื่อ $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$
18. $(D^2 + 4D + 5)y = 10$ เมื่อ $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
19. $(D^3 - 4D^2 + D + 6)y = 3xe^x + 2e^x - \sin x$ เมื่อ $y(0) = \dfrac{33}{40}$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$
20. $(D^3 - 6D^2 + 9D - 4)y = 8x^2 + 3 - 6e^{2x}$ เมื่อ $y(0) = 1$, $y'(0) = 7$, $y''(0) = 10$
21. จงแสดงว่าสมการ $(D^2 + 1)y = x^3$ เมื่อ $x = 0$, $y = 0$ และเมื่อ $x = \pi$, $y = 0$ ไม่มีผลเฉลย
22. จงแสดงว่าสมการ $(D^2 + 1)y = 2\cos x$ เมื่อ $x = 0$, $y = 0$ เมื่อ $x = \pi$, $y = 0$ มีหลายผลเฉลย

6.2 การหาผลเฉลยเฉพาะด้วยตัวดำเนินการผกผัน (inverse operator)

สมการไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$P(D)\,y = f(x)$$

จะหาผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการในรูป

$$y_p = \frac{1}{P(D)}\,f(x)$$

โดยนิยาม $\frac{1}{P(D)}$ ว่าเป็นตัวดำเนินการผกผันของตัวดำเนินการ P(D) ซึ่ง

นิยาม $h(x) = \frac{1}{P(D)} f(x)$ ก็ต่อเมื่อ h(x) เป็น ผลเฉลยเฉพาะของสมการอนุพันธ์ $P(D)\,y = f(x)$

คุณสมบัติของตัวดำเนินการผกผัน

1. $P(D)\,\frac{1}{P(D)} \neq \frac{1}{P(D)}\,P(D)$
2. $\frac{1}{P(D)}\,[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1 \frac{1}{P(D)} f_1(x) + c_2 \frac{1}{P(D)} f_2(x)$ (คุณสมบัติเชิงเส้น)
3. $\frac{1}{P(D)Q(D)} f(x) = \frac{1}{P(D)}\,[\frac{1}{Q(D)} f(x)] = \frac{1}{Q(D)}\,[\frac{1}{P(D)} f(x)]$ (คุณสมบัติสลับที่ได้)

ต่อไปจะศึกษาความหมายของ $\frac{1}{P(D)}$ ในบางกรณี

กรณี $P(D) = D^n$ จะเห็นได้ว่าผลเฉลยเฉพาะของสมการ $D^n y = f(x)$

คือ $\underbrace{\int \cdots\cdots\cdots \int f(x)dx\ldots dx}_{\text{n time}} = \int\ldots\int f(x)(dx)^n$

ดังนั้นจึงได้ $\frac{1}{D^n}\,f(x) = \int\ldots\int f(x)(dx)^n$ (1)

กรณี $P(D) = (D - a)^n$

เมื่อ $n = 1$ จะได้ว่าสมการ $(D\text{-}a)y = f(x)$ เป็นสมการเชิงเส้น ตามทฤษฎีบท 2.5.1 สมการมีผลเฉลยเฉพาะเป็น

$$y_p = e^{ax} \int e^{-ax} f(x)dx$$

นั่นคือ $\frac{1}{D-a}\,f(x) = e^{ax} \int e^{-ax} f(x)dx$

เมื่อ $n = 2$ จะได้ว่า $\frac{1}{(D-a)^2} f(x) = \frac{1}{D-a}\left(\frac{1}{D-a} f(x)\right) = e^{ax} \int\int e^{-ax} f(x)(dx)^2$

ในกรณีทั่วไป $\frac{1}{(D-a)^n} f(x) = e^{ax} \int..\int e^{-ax} f(x)(dx)^n$) (2)

ตัวอย่าง 6.2.1 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^4 - 5D^3 + D^2 + 21D - 18)y = e^{-3x}$

วิธีทำ จาก (D4- 5D3 + D2+ 21D - 18)y = e□ s□ up5(-3x)

$$
\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^4 - 5D^3 + D^2 + 21D - 18} e^{-3x} \\
&= \frac{1}{(D-3)^2(D+2)(D-1)} e^{-3x} \\
&= \frac{1}{(D-3)^2(D+2)} \left(\frac{1}{D-1} e^{-3x} \right) \\
&= \frac{1}{(D-3)^2(D+2)} \left(e^{x} \int e^{-x} e^{-3x} dx \right) \\
&= \frac{1}{(D-3)^2(D+2)} \left(\frac{e^{-3x}}{-4} \right) \\
&= \frac{1}{(D-3)^2} \left(\frac{1}{D+2} \left(\frac{e^{-3x}}{-4} \right) \right) \\
&= \frac{1}{(D-3)^2} \left(e^{-2x} \int e^{2x} \frac{e^{-3x}}{-4} dx \right) \\
&= \frac{1}{(D-3)^2} \left(\frac{e^{-3x}}{4} \right) \\
&= e^{3x} \int\int e^{-3x} \left(\frac{e^{-3x}}{4} \right) dx \\
&= \frac{e^{-3x}}{144} \qquad \#
\end{aligned}
$$

การหาผลเฉลยเฉพาะ y_p ดังตัวอย่าง 6.2.1 ทำโดยใช้ตัวดำเนินการผกผันซ้ำเป็นลำดับที่ละตัวต่อไปเรื่อย ๆ จนหมด เรียกวิธีนี้ว่าวิธีลดอันดับ อาจทำได้อีกวิธีหนึ่ง คือแยกเศษส่วนย่อย ดังต่อไปนี้

ถ้า p(x) เป็นพหุนามซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูป $(x-r_1)^{n1}(x-r_2)^{n2}\ldots(x-r_m)^{nm}$ แล้วเราสามารถเขียน

$\frac{1}{p(x)}$ ในรูปเศษส่วนย่อย $\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_k} \frac{c_{kj}}{(x-r_k)^j}$ เมื่อ c_{kj} เป็นค่าคงตัว

และ ถ้า $P(D) = (D-r_1)^{n1}(D-r_2)^{n2}\ldots(D-r_m)^{nm}$ แล้ว

$\frac{1}{P(D)} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_k} \frac{c_{kj}}{(D-r_k)^j}$ เมื่อ c_{kj} เป็นค่าคงตัวที่สอดคล้องกับการแยกเศษส่วนย่อยตามข้างบน

ขอละการพิสูจน์ในที่นี้ แต่จะแสดงตัวอย่างบางตัวอย่างให้เห็น

ตัวอย่าง 6.2.2 จงแสดงว่า $\frac{1}{(D-1)(D-2)} = \frac{1}{D-2} - \frac{1}{D-1}$

พิสูจน์ $\frac{1}{(D-1)(D-2)}$ (f(x)) $= \frac{1}{(D-1)}\left(\frac{1}{D-2}f(x)\right) = \frac{1}{(D-1)}\left(e^{2x}\int e^{-2x}f(x)dx\right)$

$$= e^{x}\int e^{-x}\left(e^{2x}\int e^{-2x}f(x)dx\right)dx$$

$$= e^{x}\int e^{x}\left(\int e^{-2x}f(x)dx\right)dx$$

ใช้เทคนิคอินทิกรัลแบบทีละส่วน (By Part) จะได้

$$\int e^{x}\left(\int e^{-2x}f(x)dx\right)dx = e^{x}\int e^{-2x}f(x)dx - \int e^{-x}f(x)dx$$

ดังนั้น $e^{x}\int e^{x}\left(\int e^{-2x}f(x)dx\right)dx = e^{2x}\int e^{-2x}f(x)dx - e^{x}\int e^{-x}f(x)dx$

$$= \frac{1}{D-2}f(x) - \frac{1}{D-1}f(x)$$

$$= \left(\frac{1}{D-2} - \frac{1}{D-1}\right) f(x)$$

จึงได้ว่า $\frac{1}{(D-1)(D-2)} = \frac{1}{D-2} - \frac{1}{D-1}$ #

ตัวอย่าง 6.2.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^3 + D^2 - D - 1)y = e^{2x}$

วิธีทำ ผลเฉลยเฉพาะ คือ $y_p = \frac{1}{D^3 + D^2 - D - 1}e^{2x} = \frac{1}{(D-1)(D+2)^2}e^{2x}$

แยกเศษส่วนย่อยของ $\frac{1}{(D-1)(D+2)^2}$ ได้

$$y_p = \left(\frac{\frac{1}{4}}{D-1} - \frac{\frac{1}{4}}{D+1} - \frac{\frac{1}{2}}{(D+1)^2}\right)e^{2x}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{D-1}e^{2x} - \frac{1}{4}\frac{1}{D+1}e^{2x} - \frac{1}{2}\frac{1}{(D+1)^2}e^{2x}$$

$$= \frac{1}{4}e^{x}\int e^{-x}e^{2x}dx - \frac{1}{4}e^{-x}\int e^{x}e^{2x}dx - \frac{1}{2}e^{-x}\int\int e^{x}e^{2x}dx$$

$$= \frac{e^{2x}}{4} - \frac{e^{2x}}{12} - \frac{e^{2x}}{18}$$

$$= \frac{4}{36}e^{2x} = \frac{1}{9}e^{2x}$$ #

การหาผลเฉลยเฉพาะโดยวิธีที่กล่าวมาในตอนที่ผ่านมานั้นเป็นวิธีหาผลเฉลยเฉพาะโดยทั่วไป ในตอนนี้จะกล่าวถึงวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะเมื่อ f(x) มีรูปแบบเป็น ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล (e^{ax}) ฟังก์ชัน sine หรือ cosine และ ฟังก์ชันพหุนาม (x^m)

6.2.1 เมื่อ $f(x) = e^{ax}$

พิจารณา $P(D)y = e^{ax}$

ถ้า $P(a) \neq 0$ จากการหา y_p โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ ให้ $y_q = c\,e^{ax}$

แทนในสมการดังนั้น $e^{ax} = P(D)\,y_q = P(D)\,ce^{ax} = cP(a)\,e^{ax}$

จึงได้ว่า $c = \dfrac{1}{P(a)}$

นั่นคือ $y_p = \dfrac{e^{ax}}{P(a)}$

ดังนั้น ได้ $\dfrac{1}{P(D)}e^{ax} = \dfrac{e^{ax}}{P(a)}$ ถ้า $P(a) \neq 0$

แต่ถ้า $P(a) = 0$ จะไดว่า $P(D)$ ต้องมี $(D - a)$ เป็นตัวประกอบอยู่ อย่างน้อย 1 ตัว สมมติมีซ้ำกัน k ตัว ดังนั้นได้

$$P(D) = Q(D)\,(D - a)^k$$

$Q(D)$ คือตัวดำเนินการอันดับ $n - k$ เมื่อ $P(D)$ เป็นตัวดำเนินการอันดับ n และ $Q(a) \neq 0$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\frac{1}{P(D)}e^{ax} &= \frac{1}{Q(D)(D-a)^k}e^{ax} = \frac{1}{(D-a)^k Q(D)}e^{ax}\\ &= \frac{1}{(D-a)^k}\left(\frac{1}{Q(D)}e^{ax}\right) = \frac{1}{(D-a)^k}\left(\frac{1}{Q(a)}e^{ax}\right)\\ &= \frac{1}{Q(a)}e^{ax}\int\!\!\ldots\!\!\int e^{-ax}e^{ax}(dx)^k = \frac{e^{ax}x^k}{Q(a)k!} \qquad (3)\end{aligned}$$

ค่าของ $Q(a)\,k!$ อาจหาได้โดยการพิจารณาจาก $P(D) = Q(D)(D - a)^k$ มีพหุนามช่วยของ $P(D)$ คือ

$P(r) = Q(r)(r - a)^k$ โดยสูตร Leibnitz's rule ที่ว่า $(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f^{(n-i)}g^{(i)}$ จะได้

$$\begin{aligned}P^{(n)}(r) &= [Q(r)\,(r - a)^k)\,]^{(n)}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}Q^{(n-i)}(r)[(r-a)^k]^{(i)}\end{aligned}$$

ถ้า $n < k$ จะได้ $P^{(n)}(a) = 0$ เพราะว่าทุกพจน์ทางขวาจะยังมี $(r - a)$ คูณอยู่ด้วย

และเมื่อ $n = k$ พจน์สุดท้ายทางขวาคือ $Q(r)[(r-a)^k]^{(n)}$ จะเป็นพจน์เดียวที่ไม่มี $(r - a)$ คูณด้วยเพราะว่า

$Q(r)[(r-a)^k]^{(n)} = Q(r)k!$ (เมื่อ $n = k$) ในขณะที่พจน์อื่น ๆ จะยังมี $(r - a)$ คูณอยู่ด้วย

ดังนั้นเมื่อ $r = a$ จะได้

$$P^{(n)}(a) = 0 + 0 + \ldots + 0 + Q(a)\,k!$$

สรุป ได้ว่าในกรณี $f(x) = e^{ax}$ มีผลเฉลยเฉพาะ $y_p = \frac{1}{P(D)}e^{ax}$ ดังนี้

ถ้า $P(a) \neq 0$ มี $y_p = \frac{1}{P(D)}e^{ax} = \frac{1}{P(a)}e^{ax}$

ถ้า $P(a) = 0$ มี $y_p = \frac{1}{P(D)}e^{ax} = \frac{1}{Q(D)(D-a)^k}e^{ax} = \frac{e^{ax}x^k}{Q(a)k!}, \quad Q(a) \neq 0$

หรือ $y_p = \frac{1}{P(D)}e^{ax} = \frac{e^{ax}x^k}{P^{(k)}(a)}$ เมื่อ k คือจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $P^{(k)}(a) \neq 0$

ตัวอย่าง 6..2.4 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D+2)(D+3)y = 3e^{-x}$

วิธีทำ สมการ $(D+2)(D+3)y = 3e^{-x}$

มี $a = -1$ และ $P(-1) = (-1+2)(-1+3) = 2 \neq 0$

ดังนั้นได้ $y_p = \frac{1}{(D+2)(D+3)}3e^{-x}$

$= \frac{1}{(-1+2)(-1+3)}3e^{-x} = \frac{3e^{-x}}{2}$ #

ตัวอย่าง 6.2.5 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D-1)^3(D+1)y = -2e^x$

วิธีทำ สมการนี้ $a = 1$ และ $P(1) = (1-1)^3(1+1) = 0$ และ $k = 3$, $Q(D) = D+1$

ดังนั้นได้ $y_p = \frac{1}{(D-1)^3(D+1)}(-2e^x) = \frac{-2e^x x^3}{(1+1)3!} = -\frac{e^x x^3}{6}$

หรือ $y_p = \frac{1}{(D-1)^3(D+1)}(-2e^x) = \frac{-2e^x x^3}{P^{(3)}(1)}$

โดย $P(r) = (r-1)^3(r+1)$, $P(1) = 0$

$P'(r) = 3(r-1)^2(r+1) + (r-1)^3$, $P'(1) = 0$

$P''(r) = 6(r+1)(r-1) + 6(r-1)^2$, $P''(1) = 0$

$P'''(r) = 6(r+1) + 12(r-1)$, $P'''(1) = 12 \neq 0$

ดังนั้น $y_P = \frac{-2e^x x^3}{12} = \frac{-e^x x^3}{6}$ #

6.2.2 เมื่อ f(x) = cos ax หรือ sin ax

จาก $D^2 \sin ax = -a^2 \sin ax$ และ $D^2 \cos ax = -a^2 \cos ax$

ทำให้ได้ว่า $D^{2n} \sin ax = (-a^2)^n \sin ax$ และ $D^{2n} \cos ax = (-a^2)^n \cos ax$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $P(D^2) \sin ax = P(-a^2) \sin ax$ และ $P(D^2) \cos ax = P(-a^2) \cos ax$ (7)

เมื่อ $P(D^2)$ เป็นตัวดำเนินการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และสามารถเขียนอยู่ในพจน์ของ D^2

$P(-a^2)$ เป็นจำนวนจริงที่ได้จากการแทน D^2 ด้วย $-a^2$ ใน $P(D^2)$

เช่น $(D^6 + 3D^4 - 2D^2 + 5) \sin x = ((-1)^3 + 3(-1)^2 - 2(-1) + 5) \sin x = 9 \sin x$

จาก (7) เราได้ว่า

$$\frac{1}{P(D^2)}(\sin ax) = \frac{1}{P(-a^2)}(\sin ax) \quad \text{และ} \quad \frac{1}{P(D^2)}(\cos ax) = \frac{1}{P(-a^2)}(\cos ax) \quad \text{โดยที่ } P(-a^2) \neq 0$$

โดยทั่วไปของตัวดำเนินการจะอยู่ในรูป P(D) แต่เราสามารถจัดอยู่ในรูปตัวดำเนินการ $P(D^2)$ ได้ดังต่อไปนี้

จาก $P(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1D + a_0$ สามารถเขียนอยู่ในรูป $P_1(D^2) + DP_2(D^2)$ ได้เสมอ

เมื่อ $P_1(D^2)$, $P_2(D^2)$ เป็นตัวดำเนินการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และสามารถเขียนอยู่ในพจน์ของ D^2

โดยถ้า n เป็นเลขคู่ เขียน $P(D) = (a_n(D)^n + a_{n-2}(D)^{n-2} + ... + a_0) + D(a_{n-1}(D)^{n-2} + a_{n-3}(-D)^{n-4} + ... + a_1)$

และถ้า n เป็นเลขคี่ เขียน $P(D) = (a_{n-1}(D)^{n-1} + a_{n-3}(D)^{n-3} + ... + a_0) + D(a_n(D)^{n-1} + a_{n-2}(-D)^{n-3} + ... + a_1)$

ดังนั้น $(P_1(D^2) + DP_2(D^2))(P_1(D^2) - DP_2(D^2)) = (P_1(D^2))^2 - D^2(P_2(D^2))^2$

เป็นตัวดำเนินการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และสามารถเขียนอยู่ในพจน์ของ D^2

จาก $P(D)\frac{1}{P(D)}f(x) = f(x)$

ดังนั้น
$$\frac{1}{P(D)} \sin ax = \frac{1}{P_1(D^2) + DP_2(D^2)} \sin ax$$
$$= (P_1(D^2) - DP_2(D^2))\frac{1}{(P_1(D^2) - DP_2(D^2))(P_1(D^2) + DP_2(D^2))}(\sin ax)$$
$$= (P_1(D^2) - DP_2(D^2))\frac{1}{(P_1(D^2))^2 - D^2P_2(D^2)^2}(\sin ax)$$
$$= (P_1(D^2) - DP_2(D^2))\frac{1}{(P_1(-a^2))^2 + a^2P_2(-a^2)^2}(\sin ax) \text{ เมื่อ } (P_1(-a^2))^2 + a^2(P_2(-a^2))^2) \neq 0$$
$$= \frac{1}{(P_1(-a^2))^2 + a^2P_2(-a^2)^2}(P_1(D^2) - DP_2(D^2))(\sin ax)$$
$$= \frac{1}{(P_1(-a^2))^2 + a^2P_2(-a^2)^2}(P_1(D^2)\sin ax - DP_2(D^2)\sin ax)$$
$$= \frac{1}{(P_1(-a^2))^2 + a^2P_2(-a^2)^2}(P_1(-a^2)\sin ax - DP_2(-a^2)\sin ax)$$
$$= \frac{1}{(P_1(-a^2))^2 + a^2P_2(-a^2)^2}(P_1(-a^2)\sin ax - aP_2(-a^2)\cos ax)$$

ในทำนองเดียวกัน สามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{1}{P(D)}\cos ax = \frac{P_1(-a^2)\cos ax + aP_2(-a^2)\sin ax}{(P_1(-a^2))^2 + a^2P_2(-a^2)^2} \quad \text{เมื่อ } (P_1(-a^2))^2 + a^2(P_2(-a^2))^2) \neq 0$$

ใกรณีเฉพาะ $P(D) = D^2 + a^2$ เราไม่สามารถใช้วิธีดังกล่าวหาค่าของ $\frac{1}{D^2 + a^2}\sin ax$ หรือ $\frac{1}{D^2 + a^2}\cos ax$

แต่สามารถหา $\frac{1}{D^2+a^2}\sin ax$ และ $\frac{1}{D^2+a^2}\cos ax$ โดยหัวข้อ 6.1 ได้

จากหัวข้อ 6.1 สามารถแสดงได้ว่า y_p ของสมการ $(D^2+a^2)y = \sin ax$ คือ $\frac{-x\cos ax}{2a}$

และ y_p ของสมการ $(D^2+a^2)y = \cos ax$ คือ $\frac{x\sin ax}{2a}$

นั่นคือ $\frac{1}{D^2+a^2}\sin ax = \frac{-x\cos ax}{2a}$ และ $\frac{1}{D^2+a^2}\cos ax = \frac{x\sin ax}{2a}$

ตัวอย่าง 6.2.6 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^2-4D+3)y = 20\cos x$

วิธีทำ ผลเฉลยเฉพาะ คือ

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2-4D+3}20\cos x \\
&= (D^2+3+4D)\frac{1}{(D^2+3+4D)(D^2+3-4D)}20\cos x \\
&= (D^2+3+4D)\frac{1}{(D^2+3)^2-16D^2)}20\cos x \\
&= (D^2+3+4D)\frac{1}{(-1+3)^2+16)}20\cos x \\
&= (D^2+3+4D)\cos x \\
&= (-\cos x - 4\sin x + 3\cos x) \\
&= 2\cos x - 4\sin x
\end{aligned}$$

#

ตัวอย่าง 6.2.7 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^3-D^2+4D-4)y = 4\sin 2x$

วิธีทำ ผลเฉลยเฉพาะ คือ $y_p = \frac{1}{D^3-D^2+4D-4}4\sin 2x$

จาก $D^3-D^2+4D-4 = (D^2+4)(D-1)$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^3-D^2+4D-4}4\sin 2x &= \frac{1}{(D^2+4)(D-1)}4\sin 2x \\
&= \frac{1}{(D^2+4)}(D+1)\frac{1}{(D+1)(D-1)}4\sin 2x \\
&= \frac{1}{(D^2+4)}(D+1)\frac{1}{(D^2-1)}4\sin 2x \\
&= \frac{1}{(D^2+4)}(D+1)\frac{4}{-5}\sin 2x \\
&= \frac{4}{-5}\frac{1}{(D^2+4)}(2\cos 2x + \sin 2x) \\
&= \frac{4}{-5}\left(\frac{2x\sin 2x}{4}+\frac{-x\cos 2x}{4}\right) \\
&= \frac{x}{5}(\cos 2x - 2\sin 2x)
\end{aligned}$$

#

6.2.3 เมื่อ $f(x) = e^{ax} q(x)$, a เป็นค่าคงตัว q(x) เป็นฟังก์ชันของ x

สมการ $P(D)y = e^{ax} q(x)$

มีผลเฉลยเฉพาะ $y_p = \frac{1}{P(D)} e^{ax} q(x)$

จากคุณสมบัติตัวดำเนินการข้อที่ว่า

$$P(D)\, e^{ax} y = e^{ax} P(D+a)y$$

ถ้าให้ $y = \frac{1}{P(D+a)} q(x)$ จะได้

$$P(D)\, e^{ax} \frac{1}{P(D+a)} q(x) = e^{ax} P(D+a) \frac{1}{P(D+a)} q(x)$$

$$= e^{ax} q(x)$$

ดังนั้น $\frac{1}{P(D)} e^{ax} q(x) = e^{ax} \frac{1}{P(D+a)} q(x)$

ต่อไปจะแสดงว่า ถ้า f(x) เป็นพหุนามดีกรี m และ และ $P(a) \neq 0$

จะได้ว่า $\frac{1}{P(D)} e^{ax} f(x) = e^{ax} [\, g(a)f(x) + \frac{g'(a)}{1!} f'(x) + \ldots + \frac{g^{(m)}(a)}{m!} f^{(m)}(x) \,]$ เมื่อ $g(r) = \frac{1}{P(r)}$ (4)

ก่อนอื่นจะแสดงว่า ถ้า $\frac{1}{P(D)} Q(x,a) = y(x,a)$ แล้ว $\frac{1}{P(D)} \frac{\partial Q}{\partial a} = \frac{\partial y}{\partial a}$ (5)

จาก $\frac{1}{P(D)} Q(x,a) = y(x,a)$ จะได้ว่า $P(D)\, y(x,a) = Q(x,a)$

ดังนั้น $P(D) \frac{\partial y}{\partial a} = (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0) \frac{\partial y}{\partial a}$

$$= a_n \frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^n \partial a} + a_{n-1} \frac{\partial^n y}{\partial x^{n-1} \partial a} + \ldots + a_0 \frac{\partial y}{\partial a}$$

$$= \frac{\partial}{\partial a} (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0) y$$

$$= \frac{\partial}{\partial a} (P(D)y) = \frac{\partial Q}{\partial a}$$

จึงได้ว่า $\frac{1}{P(D)} \frac{\partial Q}{\partial a} = \frac{\partial y}{\partial a}$ ดังนั้นสมการ (5) เป็นจริง

ในกรณี $Q(x) = e^{ax}$ เราเคยได้ว่า $\frac{1}{P(D)} e^{ax} = \frac{1}{P(a)} e^{ax}$

ให้ $\frac{1}{P(a)} = g(a)$

จาก (5) ดังนั้น $\frac{1}{P(D)} x e^{ax} = \frac{\partial}{\partial a} [g(a) e^{ax}] = e^{ax} [xg(a) + g'(a)]$

โดยสูตร Leibnitz's rule จึงได้ $\frac{1}{P(D)} x^k e^{ax} = e^{ax} [\, x^k g(a) + kx^{k-1} \frac{g'(a)}{1!} + \ldots + k! \frac{g^{(k)}(a)}{k!} \,]$

โดยอาศัยที่ว่า $\frac{1}{P(D)}$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

จึงได้ว่า $\frac{1}{P(D)} e^{ax} f(x) = e^{ax} [\, g(a)f(x) + \frac{g'(a)}{1!} f'(x) + ... + \frac{g^{(m)}(a)}{m!} f^{(m)}(x) \,]$

จาก (4) ในกรณีที่ a = 0 จึงได้ว่า ถ้า f(x) เป็นพหุนามระดับขั้น m และ และ $P(0) \neq 0$

จะได้ว่า $\frac{1}{P(D)} f(x) = g(0)f(x) + \frac{g'(0)}{1!} f'(x) + ... + \frac{g^{(m)}(0)}{m!} f^{(m)}(x)$ เมื่อ $g(r) = \frac{1}{P(r)}$

หรือ $\frac{1}{P(D)} f(x) = (\, g(0) + \frac{g'(0)}{1!} D + ... + \frac{g^{(m)}(0)}{m!} D^m \,) f(x)$

ในทางปฏิบัติเราอาจหา $g(0) + \frac{g'(0)}{1!} D + ... + \frac{g^{(m)}(0)}{m!} D^m$ ได้จากวิธีหารยาวโดยตรงโดยเอา 1 ตั้งหารด้วย P(D) จนผลลัพธ์มีเลขชี้กำลังของ D ซึ่งเรียงลำดับกำลังของ D จากน้อยไปมากจนถึงกำลังของ D มากกว่าหรือเท่ากับ ระดับขั้นของพหุนาม f(x)

ตัวอย่าง 6..2.8 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^3 - 3D + 2)y = 2x^3 - 9x^2 + 2x - 16$

วิธีทำ ผลเฉลยเฉพาะ $y_p = \frac{1}{D^3 - 3D + 2} (2x^3 - 9x^2 + 2x - 16)$

เอา 1 ตั้งหารด้วย $2 - 3D + D^3$ ได้

$$\frac{1}{2 - 3D + D^3} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}D + \frac{7}{8}D^2 + \frac{15}{16}D^3 + ...$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} y_p &= (\frac{1}{2} + \frac{3}{4}D + \frac{7}{8}D^2 + \frac{15}{16}D^3 + ...)\,(2x^3 - 9x^2 + 2x - 16) \\ &= \frac{1}{2}(2x^3 - 9x^2 + 2x - 16) + \frac{3}{4}D\,(2x^3 - 9x^2 + 2x - 16) + \\ &\quad \frac{7}{8}D^2(2x^3 - 9x^2 + 2x - 16) + \frac{15}{16}D^3\,(2x^3 - 9x^2 + 2x - 16) + ... \\ &= x^3 - \frac{9}{2}x^2 + x - 8 + \frac{3}{4}(6x^2 - 18x + 2) + \frac{7}{8}(12x - 18) + \frac{15}{16}(12) \\ &= x^3 - 2x - \frac{17}{2} \end{aligned}$$

#

ตัวอย่าง 6.2.9 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $D^4(D^2 - 1)y = x^2$

วิธีทำ ผลเฉลยเฉพาะ

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^4(D^2-1)} x^2 = \frac{1}{D^4}(-1 - D^2 - ...)x^2 \\ &= \frac{1}{D^4}(-x^2 - 2) = \iiiint (-x^2 - 2)(dx)^4 \\ &= -\frac{x^6}{360} - \frac{x^4}{12} \end{aligned}$$

#

ตัวอย่าง 6.2.10 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^2 - 4D + 2)y = (x^2 + x)e^{2x}$

วิธีทำ ผลเฉลยเฉพาะ y_p

$$= \frac{1}{D^2 - 4D + 2} e^{2x}(x^2 + x)$$

$$= e^{2x} \frac{1}{(D+2)^2 - 4(D+2) + 2} (x^2 + x)$$

$$= e^{2x} \frac{1}{D^2 - 2} (x^2 + x)$$

$$= e^{2x} \left(-\frac{1}{2} - \frac{D^2}{4} - \ldots \right)(x^2 + x)$$

$$= e^{2x} \left[\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) - \frac{D^2}{4}(x^2 + x) \right]$$

$$= e^{2x} \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= -\frac{e^{2x}}{2} (x^2 + x + 1) \qquad \#$$

แบบฝึกหัด 6.2

จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการในข้อ 1 ถึง 6

1. $(D^2 - 7D + 2)y = e^{5x}$
2. $(D^2 - 3D + 2)y = e^{2x}$
3. $(D^2 + 3D - 4)y = 12e^{2x}$
4. $(D^2 + 3D - 4)y = 15e^{2x}$
5. $(D^2 - 3D + 2)y = e^{x} + e^{2x}$
6. $D^2(D - 2)^3 y = 48e^{2x}$
7. $(D^3 - 5D^2 + 8D - 4)y = e^{2x} + e^{3x}$
8. $(D^2 + 16)y = 14\cos 3x$
9. $(D^2 + 16)y = 24\sin 4x$
10. $(D^2 + 1)y = 12\cos 2x - \sin x$
11. $(D^2 + D)y = -\cos x$
12. $(D^2 - 4D + 3)y = 20\cos x$
13. $(D^2 - 4D + 3)y = 2\cos x + 4\sin x$
14. $(D^2 + 6D + 13)y = 60\cos x + 26$
15. $(D^3 - 3D - 2)y = 100\sin 2x$
16. $(D^2 + 1)y = 12\cos 2x$
17. $(D^6 - 1)y = x10$
18. $(D^3 + 3D^2 - 4)y = 16x3 + 20x2$
19. $D^2(D^2 + 4)y = 12x$
20. $(D^2 - 3D + 2)y = 6x2 - 6x - 11$
21. $(D^2 + 4)y = 4\sin 2x$
22. $(D^2 - 4)y = 8xe^{2x}$
23. $(D^2 + 2D + 1)y = 48e^{-x}\cos 4x$
24. $(D - 2)^2 y = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$
25. $(D^2 + 4D - 4)y = -\dfrac{e^{-2x}}{x^2}$
26. $(D^2 + 5D + 6)y = e^{-2x}(\sec^2 x)(1 + 2\tan x)$
27. $(D - 9)^2 y = e^{9x} f''(x)$
28. $D(D^2 + 4)y = 4x^3 + 2x$
29. $(D^2 - 1)y = xe^{3x}$
30. $(D-1)^2(D^3 + D^2 + 1)y = xe^{x}$

6.3 การหาผลเฉลยเฉพาะโดยวิธีแปรตัวแปรเสริม (method of variation of parameters)

การหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธ์ P(D)y = f(x) ตามหัวข้อ 6.1 และ 6.2 นั้นจะสามารถทำได้เมื่อ f(x) เป็นฟังก์ชันในรูป x^n, e^{ax} , cos bx , sin bx และหรือผลบวกหรือผลคูณของฟังก์ชันเหล่านี้

ถ้าหาก f(x) เป็นฟังก์ชันรูปแบบอื่น เช่น tan x , ln x ฯลฯ การหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธ์ P(D)y = f(x) ตามหัวข้อ 6.1 จะทำไม่ได้ และ ตามหัวข้อ 6.2จะทำได้เฉพาะบางกรณีและถ้า จะหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธ์

$$F(D)y = f(x) \quad \text{เมื่อ} \quad F(D) = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \ldots + a_1(x)D + a_0(x)$$

ตามหัวข้อ 6.1 และ ตามหัวข้อ 6.2จะทำไม่ได้ แต่โดยวิธีแปรตัวแปรเสริมนี้ จะหาผลเฉลยได้

วิธีแปรตัวแปรเสริม ความจำเป็นอันสำคัญในวิธีนี้คือ ต้องหาผลเฉลยเติม เต็มของสมการให้ได้ก่อน (ซึ่งจะหาได้ง่ายถ้าสมการมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวและค่อนข้างจะลำบากหาก สัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร) แล้วแทนค่าคงตัวไม่เจาะจงในผลเฉลยเติมเต็มด้วยฟังก์ชัน จากนั้นหาฟังก์ชัน เหล่านั้น ตามเงื่อนไขที่จะกล่าวต่อไปนี้

เพื่อความเข้าใจได้ง่ายในวิธีการแปรตัวแปรเสริม ขอเริ่มต้นด้วยสมการเชิงอนุพันธ์อันอับ 2 ก่อน พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์อันดับ 2

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \tag{1}$$

มีสมการเอกพันธ์สัมพัทธ์

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{2}$$

สมมติผลเฉลยทั่วไปของ (2) ซึ่งก็คือผลเฉลยเติมเต็มของ (1) เป็น

$$y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{3}$$

เปลี่ยน c_1 กับ c_2ใน (3) เป็นฟังก์ชันของ x ให้ เป็น $v_1(x)$ กับ $v_2(x)$

จะต้องหาเงื่อนไขที่เพียงพอซึ่งจะทำให้

$$y = v_1(x)\,y_1(x) + v_2(x)\,y_2(x) \tag{4}$$

เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (1)

หาอนุพันธ์ของ (4) เทียบกับ x ได้

$$y' = v_1(x)\,y_1'(x) + v_2(x)\,y_2'(x) + v_1'(x)\,y_1(x) + v_2'(x)\,y_2(x) \tag{5}$$

ในการหาค่าของ 2 ฟังก์ชัน $v_1(x)$ กับ $v_2(x)$ ต้องมีเงื่อนไข 2 เงื่อนไข จึงจะหาค่าได้ ดังนั้นเรากำหนดเงื่อนไขดังนี้

เงื่อนไขข้อที่หนึ่งให้ $$v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{6}$$

ดังนั้น สมการ (5) จะกลายเป็น

$$y' = v_1(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2'(x) \tag{7}$$

หาอนุพันธ์ของ (7) เทียบกับ x ได้

$$y'' = v_1(x)\, y_1''(x) + v_2(x)\, y_2''(x) + v_1'(x)\, y_1'(x) + v_2'(x)\, y_2'(x)$$

ถ้า $y = v_1(x)\, y_1(x) + v_2(x)\, y_2(x)$ จะเป็นผลเฉลยของสมการ (1)

ผลเฉลยนี้ต้องสอดคล้องสมการ (1) ดังนั้นจะได้

$$f(x) = a_2(x)[\, v_1(x)\, y_1''(x) + v_2(x)\, y_2''(x) + v_1'(x)\, y_1'(x) + v_2'(x)\, y_2'(x)\,] + a_1(x)[\, v_1(x) y_1'(x) + v_2(x) y_2'(x)\,] + a_0(x)[v_1(x)\, y_1(x) + v_2(x)\, y_2(x)]$$

$$= v_1(x)[a_2(x)\, y_1''(x) + a_1(x)\, y_1'(x) + a_0(x) y_1(x)\,] + v_2(x)[a_2(x)\, y_2''(x) + a_1(x)\, y_2'(x) + a_0(x) y_2(x)\,] + a_2(x)[\, v_1'(x)\, y_1'(x) + v_2'(x)\, y_2'(x)\,]$$

$$= v_1(x)(0) + v_2(x)(0) + a_2(x)[\, v_1'(x)\, y_1'(x) + v_2'(x)\, y_2'(x)\,]$$

ทั้งนี้เนื่องจาก $y_1(x)$ และ $y_2(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ (2)

ดังนั้นจะได้

$$v_1'(x)\, y_1'(x) + v_2'(x)\, y_2'(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)} \qquad (8)$$

จากสมการ (6) และ (8) คือ

$$v_1'(x) y_1(x) + v_2'(x) y_2(x) = 0$$

$$v_1'(x)\, y_1'(x) + v_2'(x)\, y_2'(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)} \qquad (9)$$

คือเงื่อนไขที่เพียงพอที่จะทำให้ $y = v_1(x)\, y_1(x) + v_2(x)\, y_2(x)$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (1) และระบบสมการเชิงเส้น (9) เป็นระบบสมการเชิงเส้นในตัวแปร $v_1'(x)$ และ $v_2'(x)$ ซึ่งมีค่ามีค่าตัวกำหนดของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์คือค่า วอรนสเกียน ของ ฟังก์ชัน y_1, y_2 ($W(y_1(x), y_2(x))$) และ y_1, y_2 เป็นผลเฉลยของสมการ (2)

ดังนั้น $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ โดยกฎของคราเมอร์จะได้ว่า $v_1'(x)$ และ $v_2'(x)$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \dfrac{f(x)}{a_2(x)} & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = -\frac{f(x) y_2(x)}{a_2(x) W(y_1(x), y_2(x))}$$

และ
$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \dfrac{f(x)}{a_2(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{f(x)y_1(x)}{a_2(x)W(y_1(x), y_2(x))}$$

และเมื่ออินทิเกรดหา $v_1(x)$ และ $v_2(x)$ แล้วก็จะได้ผลเฉลยของสมการ

ตัวอย่าง 6.3.1 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $y'' + y = \tan x$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $r^2 + 1 = 0$ ได้ $r = \pm i$

ดังนั้นผลเฉลยเติมเต็มคือ $y_c = c_1\cos x + c_2\sin x$

ให้ผลเฉลยเฉพาะของสมการ คือ $y_p = v_1(x)\cos x + v_2(x)\sin x$

นั่นคือ $y_1(x) = \cos x$ และ $y_2(x) = \sin x$ และโดยระบบสมการ (9) ได้เป็น

$$v_1'(x)\cos x + v_2'(x)\sin x = 0$$
$$v_1'(x)(-\sin x) + v_2'(x)\cos x = \tan x$$

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\sin x \tan x = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \cos x \tan x = \sin x$$

อินทิเกรดได้
$$v_2(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x$$
$$v_1(x) = \int -\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$$
$$= \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}dx$$
$$= \int \cos x\,dx - \int \sec x\,dx$$
$$= \sin x - \ln(\sec x + \tan x)$$

ดังนั้นได้ผลเฉลยเฉพาะ
$$y_p = [\sin x - \ln(\sec x + \tan x)]\cos x + (-\cos x)\sin x$$
$$= -\cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

ผลเฉลยทั่วไป คือ $y = c_1\cos x + c_2\sin x - \cos x\ln(\sec x + \tan x)$ #

จากการหาผลเฉลยเฉพาะสำหรับสมการอันดับสอง ขยายความคิดออกไปเป็นการหาผลเฉลยสำหรับสมการอันดับ n โดยวิธีการแปรตัวแปรเสริม จะได้ทฤษฎีดังนี้

ทฤษฎีบท 6.4.1 ถ้า $a_0(x)$, $a_1(x)$, ... , $a_n(x)$, $f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ต่อเนื่องบนช่วง I โดย $a_n(x) \neq 0$ และถ้า $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x)$ เป็นผลเฉลยเติมเต็มของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + ... + a_1(x)D + a_0(x))\, y = f(x)$$

แล้วจะมีผลเฉลยเฉพาะเป็น $y_p = v_1(x)\, y_1(x) + v_2(x)\, y_2(x) + ... + v_n(x)\, y_n(x)$

โดยที่ $v_1(x)$, $v_2(x)$, ... , $v_n(x)$ สอดคล้องเงื่อนไข

$$\begin{aligned}
v_1'(x)\, y_1(x) + v_2'(x)\, y_2(x) + ... + v_n'(x)\, y_n(x) &= 0 \\
v_1'(x)\, y_1'(x) + v_2'(x)\, y_2'(x) + ... + v_n'(x)\, y_n'(x) &= 0 \\
&\;\;......... \\
v_1'(x)\, y_1^{(n-2)}(x) + v_2'(x)\, y_2^{(n-2)}(x) + ... + v_n'(x)\, y_n^{(n-2)}(x) &= 0 \\
v_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + v_2'(x)\, y_2^{(n-1)}(x) + ... + v_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) &= \frac{f(x)}{a_n(x)}
\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าระบบสมการนี้เป็นระบบสมการเชิงเส้นในตัวแปร $v_1'(x)$, $v_2'(x)$,... , $v_n'(x)$ ซึ่งมีค่าตัวกำหนดของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์คือค่า วอรนสเกียน ของ ฟังก์ชัน $y_1, y_2, ..., y_n$($W(y_1(x),y_2(x),..., y_n(x))$) และ $y_1, y_2, ..., y_n$เป็นผลเฉลยของสมการ(2) ดังนั้น $W(y_1(x),y_2(x),..., y_n(x)) \neq 0$

โดยกฎของคราเมอร์จะได้ว่า $v_1'(x)$, $v_2'(x)$,... , $v_n'(x)$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ

$$v_i'(x) = \frac{W_i(y_1(x), y_2(x),..., y_n(x))}{W(y_1(x), y_2(x),..., y_n(x))} \qquad i = 1,2 , ... , n$$ เมื่อ $W_i(y_1(x),y_2(x),..., y_n(x))$

คือ ค่าตัวกำหนด ของเมตริกซ์ ที่เกิดจากกการแทนค่าสดมภ์ที่ i ของ วอรนสเกียน $W(y_1(x),y_2(x),..., y_n(x))$

ด้วย เมตริกซ์ค่าคงตัว $[(0\ 0\ 0\ ...\ \frac{f(x)}{a_n(x)})]^T$

(สำหรับการพิสูจน์ ขอละไว้เป็นแบบฝึกหัด)

ตัวอย่าง 6.3.2 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{4x}$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ หรือ $(r-1)(r-2)(r-3) = 0$ ได้ $r = 1, 2, 3$

จึงได้ผลเฉลยเติมเต็ม คือ $y_c = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$

ให้ผลเฉลยเฉพาะ คือ $y_p = v_1(x)e^x + v_2(x)e^{2x} + v_3(x)e^{3x}$

ดังนั้น $v_1'(x)\,e^x + v_2'(x)\,e^{2x} + v_3'(x)\,e^{3x} = 0$ (1)

$v_1'(x)\,e^x + 2v_2'(x)\,e^{2x} + 3v_3'(x)\,e^{3x} = 0$ (2)

$v_1'(x)\,e^x + 4v_2'(x)\,e^{2x} + 9v_3'(x)\,e^{3x} = e^{4x}$ (3)

แก้สมการ (1) , (2) , (3) หา $v_1'(x)$, $v_2'(x)$, $v_3'(x)$ ได้

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & 2e^{2x} & 3e^{2x} \\ e^{4x} & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{e^{2x}e^{3x}e^{4x}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}}{e^xe^{2x}e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{3e^{4x} - 2e^{4x}}{e^x(25-23)} = \frac{e^{3x}}{2}$$

ทำนองเดียวกันได้ $v_2'(x) = -e^{2x}$, $v_3'(x) = \dfrac{e^x}{2}$

อินทิเกรดได้ $v_1(x) = \dfrac{e^{3x}}{6}$, $v_2(x) = -\dfrac{e^{2x}}{2}$, $v_3(x) = \dfrac{e^x}{2}$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะ $y_p = \left(\dfrac{e^{3x}}{6}\right)e^x + \left(-\dfrac{e^{2x}}{2}\right)e^{2x} + \left(\dfrac{e^x}{2}\right)e^{3x}$

$$= \frac{e^{4x}}{6} - \frac{e^{4x}}{2} + \frac{e^{4x}}{2} = \frac{e^{4x}}{6}$$

และผลเฉลยทั่วไป $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + \dfrac{e^{4x}}{6}$

แบบฝึกหัด 6.3

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการในข้อ 1 ถึง 14

1. $y'' + y = \sec x$
2. $y'' + y = \tan^2 x$
3. $y'' + y = \cot x$
4. $y'' + 4y = \sec^2 x$
5. $y'' + y' = \tan x \sec x$
6. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sec x$
7. $Y'' - 2y' + 5y = e^x \tan 2x$
8. $y'' + y = \sec x \csc x$
9. $y'' - y = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$
10. $y'' + 4y' + 5y = xe^x$
11. $y''' - 7y'' + 14y' - 8y = \ln x$, $x > 0$
12. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^x$
13. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$
14. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{x}$

15. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $x^2y'' - 6xy' + 10y = 3x^4 + 6x^3$ เมื่อ $y = x^2$ และ $y = x^5$ เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นของสมการ $x^2y'' - 6xy' + 10y = 0$

16. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x3$ เมื่อ $y = x$ และ $y = xex$ เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นของสมการ $x2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$

17. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(\sin^2 x)y'' - (2 \sin x \cos x)y' + (\cos^2 x + 1)y = \sin^3 x$ เมื่อ $y = \sin x$ และ $y = x \sin x$ เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้น ของสมการ $(\sin^2 x)y'' - (2 \sin x \cos x)y' + (\cos^2 x + 1)y = 0$