4.2 สมการเอกพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

1. ความนำทั่วไป

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาสมการเอกพันธ์เชิงเส้นอันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์ทุกตัว เป็นจำนวนจริงคงตัว ซึ่งมีรูปแบบทั่วไปเป็น

$$\boldsymbol{a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0} \qquad (4.23)$$

เมื่อ $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ เป็นจำนวนจริงคงตัว เราสามารถหาคำตอบของสมการดังกล่าวได้ในรูปแบบที่ชัดแจ้ง

ในการหาผลเฉลยของสมการ (4.23) จะเห็นว่า ฟังก์ชัน f ที่เป็นผลเฉลยของสมการจะต้องมีสมบัติที่ว่า ผลคูณของอนุพันธ์อันดับที่ n-1 ($f^{(n-i)}$) ใด ๆ ของ f กับค่าคงตัว a_i เมื่อนำมารวมกันแล้ว จะมีค่าเป็นศูนย์ สำหรับทุกค่าของ x ซึ่งก็คือ เราต้องการฟังก์ชัน f ซึ่งอนุพันธ์อันดับใด ๆ ของ f มีค่าเท่ากับตัวมันเองคูณกับค่าคงตัว โดยอาจเขียนได้เป็น

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[f(x)\right] = cf(x) \quad \text{สำหรับทุกค่า } x$$

ในการหาฟังก์ชันที่มีสมบัติดังกล่าว จะเห็นว่า $f(x) = e^{mx}$ เมื่อ m เป็นค่าคงตัวมีสมบัติ

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(e^{mx}\right) = m^k e^{mx}$$

เราหาผลเฉลยของ (4.23) ที่อยู่ในรูป $y = e^{mx}$ เมื่อ m เป็นค่าคงตัวที่เราจะต้องหาออกมา โดยสมมุติ $y = e^{mx}$ เป็นผลเฉลยของ (4.23) เราจะได้

$$\begin{aligned} y' &= me^{mx}, \\ y'' &= m^2 e^{mx}, \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= m^n e^{mx} \end{aligned}$$

แทนค่าลงใน (4.23) จะได้

$$\boldsymbol{a_0 m^n e^{mx} + a_1 m^{n-1} e^{mx} + \cdots + a_{n-1} m e^{mx} + a_n e^{mx} = 0}$$

หรือ $$\boldsymbol{e^{mx}\left(a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n\right) = 0}$$

เพราะว่า $e^{mx} \neq 0$ เราจะได้สมาการพหุนามที่มีตัวไปทราบค่า m :

$$\boldsymbol{a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0} \qquad (4.24)$$

เรียกสมการนี้ว่า <u>สมการช่วย</u> หรือ <u>สมการลักษณะเฉพาะ</u> ของสมการ (4.23) ถ้า $y = e^{mx}$ เป็นผลเฉลยของ (4.23) เราจะได้ว่า m สอดคล้องสมการ (4.24) ดังนั้น การหาผลเฉลยของ (4.23) เราจะใช้สมการ (4.24) ในการหาค่า m สังเกตว่า (4.24) ได้จากการแทนอนุพันธ์อันดับ k ด้วย m^k เรา

จะแยกพิจารณาตามลักษณะรากของ (4.24) เป็น 3 กรณี คือ เป็นจำนวนจริงที่ต่างกันทั้งหมด เป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน และเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค

<u>หมายเหตุ</u> สมการช่วยของสมการอันดับ 3 คือ สมการกำลังสามและของสมการอันดับ 4 คือสมการกำลัง 4 ผู้อ่านที่ยังไม่คุ้นเคยกับการแก้สมการเหล่านี้สามารถอ่านได้ที่ภาคผนวก 2

2. <u>กรณีที่ 1 : m เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันทั้งหมด</u>

สมมุติว่ารากของสมการ (4.24) เป็นจำนวนจริง n จำนวนที่แตกต่างกัน

คือ $m_1, m_2, \ldots, m_n$

แล้วจะได้ $e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \cdots, e^{m_n x}$ เป็น n ผลเฉลยที่แตกต่างกันของสมการ (4.23) โดยดูจาก ตัวกำหนดวรอนสเกียน จะได้ว่าผลเฉลย n ตัวดังกล่าวเป็นอิสระเชิงเส้น ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบทที่ 4.11</u>

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธ์อันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ถ้าสมการช่วย (4.24) มีรากเป็นจำนวนจริง n ตัวที่ต่างกัน คือ $m_1, m_2, \ldots, m_n$ แล้ว ผลเฉลยทั่วไปของ (4.23) คือ

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$

เมื่อ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

<u>ตัวอย่างที่ 4.20</u>

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

สมการช่วยของสมการนี้ คือ

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

ดังนั้น $(m-1)(m-2) = 0$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$

ซึ่งเป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน ดังนั้น e^x และ e^{2x} เป็นคำตอบของสมการนี้

ผลเฉลยทั่วไปเขียนได้เป็น $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

เราจะตรวจสอบดูว่า e^x และ e^{2x} เป็นอิสะเชิงเส้นหรือไม่

$$W\left(e^x, e^{2x}\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \neq 0$$

นั่นคือ e^x และ e^{2x} เป็นอิสระเชิงเส้น

ตัวอย่างที่ 4.21

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$$

สมการช่วยของสมการนี้คือ

$$m^3 - 4m^2 + m + 6 = 0$$

สังเกตว่า $m = -1$ เป็นคำตอบของสมการ โดยการหารสังเคราะห์เราจะได้

$$(m+1)(m^2 - 5m + 6) = 0$$

หรือ $$(m+1)(m-2)(m-3) = 0$$

ซึ่งรากเป็นจำนวนจริงที่ต่างกันทั้งหมด คือ

$$m_1 = -1,\ m_2 = 2,\ m_3 = 3$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}\,y$$

3. กรณีที่ 2 : m เป็นจำนวนจริงที่มีค่าซ้ำกัน

เราจะเริ่มศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.22

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 6y' + 9 = 0 \qquad (4.25)$$

สมการช่วยของสมการนี้คือ

$$m^2 - 6m + 9 = 0$$

หรือ $$(m-3)^2 = 0$$

รากของสมการ คือ $m_1 = 3$, $m_2 = 3$

คำตอบที่สมนัยกับ m_1 คือ e^{3x} และคำตอบที่สมนัยกับ m_2 คือ e^{3x} เช่นกัน ผลรวมเชิงเส้นของคำตอบจะเป็น $c_1e^{3x} + c_2e^{3x}$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่าไม่ใช่ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้น เนื่องจากคำตอบทั้งสองไม่เป็นอิสระเชิงเส้น โดยพิจารณาจาก $c_1e^{3x} + c_2e^{3x} = c_0e^{3x}$ เมื่อ $c_0 = c_1 + c_2$ ซึ่ง c_0e^{3x} ไม่ใช่ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2

เราจะหาคำตอบอีก 1 ตัวที่เป็นอิสระเชิงเส้น โดยเราทราบว่า e^{3x} เป็นคำตอบของสมการ โดยทฤษฎีบท 4.7 เราจะใช้วิธีการลดอันดับสมการ

โดยให้ $y = e^{3x}v$ เมื่อ v เป็นฟังก์ชันที่เราจะต้องหาออกมา

จะได้ว่า $y' = e^{3x}v' + 3e^{3x}v$

$y'' = e^{3x}v'' + 6e^{3x}v' + ge^{3x}v$

แทนลงใน (4.25) เราจะได้

$(e^{3x}v'' + 6e^{3x}v' + ge^{3x}v) - 6\,(e^{3x}v' + 3e^{3x}v) + ge^{3x}v = 0$

$e^{3x}v'' = 0$

ให้ $w = v'$ เราจะได้สมการอันดับ 1 คือ

$$e^{3x}\frac{dw}{dx} = 0$$

หรือ
$$\frac{dw}{dx} = 0$$

ซึ่งคำตอบ คือ $w = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง เราจะเลือกค่า $w = 1$ เป็นผลเฉลยเฉพาะราย จาก $v' = w$ เราจะได้

$v(x) = x + c_0$ เมื่อ c_0 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

โดยทฤษฎีบท 4.7 เราทราบว่าสำหรับทุกค่า c0

$y = v(x)\,e^{3x} = (x+c_0)\,e^{3x}$ เป็นคำตอบของ (4.25)

และเป็นอิสระเชิงเส้นกับ e^{3x} ด้วย โดยเลือก $c_0 = 0$

เราจะได้ $y = x\,e^{3x}$ เป็นคำตอบอีกคำตอบหนึ่ง

เราจะได้คำตอบที่เป็นอิสระเชิงเส้น คือ e^{3x} และ xe^{3x}

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของ (4.25) คือ

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} \qquad (4.26)$$

หรือ
$$y = (c_1 + c_2x)\,e^{3x} \qquad (4.27)$$

จากตัวอย่างที่แล้วมา เราจะขยายสู่กรณีของสมการทั่วไปอันดับ n (4.23) ถ้าสมการช่วย (4.24) มีรากซ้ำกัน 2 ค่า คือ m เราจะได้ว่า e^{mx} และ xe^{mx} เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้น

สมมุติว่า รากของ (4.24) มีค่าซ้ำกัน 2 ค่า คือ m และมีรากที่ต่างกัน (n-2) ตัว

$m_1, m_2, \ldots, m_{n-2}$

จะมีผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้น คือ

$$e^{mx}, xe^{mx}, e^{m_1x}, e^{m_2x}, \cdots, e^{m_{n-2}x}$$

และผลเฉลยทั่วไปเขียนได้เป็น

$$y = c_1e^{mx} + c_2xe^{mx} + c_3e^{m_1x} + \cdots + c_ne^{m_{n-2}x}$$

หรือ $$y = (c_1 + c_2x)e^{mx} + c_3e^{m_1x} + \cdots + c_ne^{m_{n-2}x}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าสมการช่วย (4.24) มีรากซ้ำกัน 3 ค่า คือ m

จะได้ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้น คือ e^{mx} , xe^{mx} และ x^2e^{mx}

ซึ่งผลเฉลยทั่วไปในส่วนนี้เขียนได้เป็น

$$(c_1+c_2x+c_3x^2)\, e^{mx}$$

จากที่กล่าวมาทั้งหมดในกรณีที่ 2 นี้ สรุปเป็นทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.12

1. พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธ์อันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ถ้าสมการช่วย (4.24) มีรากที่เป็นจำนวนจริง m ปรากฏ k ตัว แล้วผลเฉลยทั่วไปของ (4.23) ส่วนหนึ่งเขียนได้เป็น

$$(c_1+c_2x+c_3x^2+\ldots+c_kx^{k-1})\, e^{mx}$$

2. ถ้า รากที่เหลือของสมการช่วย (4.24) เป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน คือ m_{k+1} , …, m_n แล้วผลเฉลยทั่วไปของ (4.23) คือ

$$y = (c_1+c_2x+c_3x^2+\ldots+c_kx^{k-1})\, e^{mx} + c_{k+1}e^{m_{k+1}x} + \cdots + c_ne^{m_nx}$$

3. ถ้า รากที่เหลือยังคงปรากฏซ้ำกันอยู่ เราสามารถเขียนส่วนของผลเฉลยทั่วไปได้ในรูปแบบเดียวกับ ข้อ 1.

พิจารณาตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.23

จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $y''' - 4y'' - 3y' + 18y = 0$

สมการช่วยของสมการนี้ คือ $m^3 - 4m^2 - 3m + 18 = 0$

มีรากเป็น 3, 3, -2 ผลเฉลยทั่วไปเขียนได้เป็น

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + c_3e^{-2x}$$

หรือ $$y = (c_1+c_2x)\, e^{3x} + c_3e^{-2x}$$

<u>ตัวอย่างที่ 4.24</u>

จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $y^{iv} - 5y''' + 6y'' + 4y' - 8y = 0$

สมการช่วยของสมการนี้ คือ $m^4 - 5m^3 - 6m^2 + 4m - 8 = 0$

มีรากเป็น 2, 2, 2, -1 ส่วนของผลเฉลยทั่วไปที่มีราก 2 เกี่ยวข้อง

คือ $y_1 = (c_1 + c_2x + c_3x^2)\, e^{2x}$

และส่วนของรากเดียว –1 คือ

$$y_2 = c_4e^{-x}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไป คือ $y = y_1 + y_2$

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)\, e^{2x} + c_4e^{-x}$$

4. กรณีที่ 3 : m เป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค

สมมุติว่าสมการช่วย (4.24) มีจำนวนเชิงซ้อน a+bi (a, b เป็นจำนวนจริง, $i^2 = -1, b \neq 0$) ที่ไม่เป็นรากซ้ำ เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ (4.24) เป็นจำนวนจริง ดังนั้น a – bi ก็เป็นคำตอบที่ไม่ซ้ำของ (4.24) จะได้ส่วนของผลเฉลยทั่วไป เป็น

$$k_1e^{(a+bi)x} + k_2e^{(a-bi)x}$$

เมื่อ k_1, k_2 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง คำตอบถูกนิยามโดย $e^{(a+bi)x}$ และ $e^{(a-bi)x}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนของตัวแปรจริง x ซึ่งสามารถแทนได้ด้วย ผลเฉลย 2 ตัว ที่เป็นจำนวนจริง และเป็นอิสระต่อกัน โดยใช้สูตรของออยเลอร์

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin \quad \text{สำหรับทุก } \theta \in R$$

เราจะได้

$$\begin{aligned} k_1e^{(a+bi)x} + k_2e^{(a-bi)x} &= k_1e^{ax}e^{bix} + k_2e^{ax}e^{-bix} \\ &= e^{ax}[k_1e^{bix} + k_2e^{-bix}] \\ &= e^{ax}[k_1(\cos bx + i \sin bx) + k_2(\cos bx - i \sin bx)] \\ &= e^{ax}[(k_1 + k_2) \cos bx + i\,(k_1 - k_2) \sin bx] \\ &= e^{ax}[c_1 \sin bx + c_2 \cos bx] \end{aligned}$$

เมื่อ $c_1 = i(k_1 - k_2)$, $c_2 = k_1 + k_2$ เป็นค่าคงตัวตัวใหม่

จะได้ส่วนของผลเฉลยทั่วไปที่สมนัยกับราก $a \neq bi$ คือ

$$e^{ax}\,(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$$

ผลจากข้างต้นรวมกับกรณีที่ 2 เราจะได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบท 4.13</u>

1. พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธ์อันดับ n (4.23) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ถ้าสมการช่วย (4.24) มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค $a + bi$ และ $a - bi$ และไม่เป็นรากซ้ำ จะได้ส่วนของผลเฉลยทั่วไปของ (4.23) เป็น

$$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$$

2. ถ้า $a + bi$ และ $a - bi$ มีรากซ้ำ k ครั้ง แล้วส่วนของผลเฉลยทั่วไปของ (4.23) เขียนได้เป็น

$$y = e^{ax}[(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots + c_kx^{k-1}) \sin bx + (c_{k+1} + c_{k+2}x + c_{k+3}x^2 + \ldots + c_{2k}x^{k-1}) \cos bx]$$

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 4.25</u>

จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$y'' + y = 0$$

สมการช่วยของสมการนี้ คือ $m^2 + 1 = 0$

มีรากเป็น $m = \pm i$ ซึ่งเป็นจำนวนจินตภาพแท้ของ $a \pm bi$

เมื่อ $a = 0,\ b = 1$ ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y = e^{0x}(c_1 \sin 1 \cdot x + c_2 \cos 1 \cdot x)$$

หรือ $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

<u>ตัวอย่างที่ 4.26</u>

จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$y'' - 6y' + 25y = 0$$

สมการช่วยของสมการนี้ คือ $m^2 - 6m + 25 = 0$ เราจะได้

ซึ่งมีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค $a \pm bi$ เมื่อ $a = 3$, $b = 4$

จะได้ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y = e^{3x}(c_1 \sin 4x + c_2 \cos 4x)$$

ตัวอย่างที่ 4.27

จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$y^{iv} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0$$

สมการช่วยของสมการนี้ คือ

$$m^4 - 4m^3 + 14m^2 - 20m + 25 = 0$$

การหารากของสมการนี้ค่อนข้างจะใช้เวลา ดังนั้น เราจะไม่แสดงวิธีการหารากของสมการในที่นี้ โดยจะให้คำตอบของสมการ เป็น

$$1 + 2i, \quad 1 - 2i, \quad 1 + 2i, \quad 1 - 2i$$

ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุคที่ซ้ำกัน

ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y = e^x [(c_1 + c_2x) \sin 2x + (c_3 + c_4x) \cos 2x]$$

หรือ $$y = c_1e^x \sin 2x + c_2xe^x \sin 2x + c_3e^x \cos 2x + c_4xe^x \cos 2x$$

5. ปัญหาค่าเริ่มต้น

เราจะประยุกต์ผลจากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธ์ ที่มีสัมประสิทธิ์คงตัว ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.28

จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' - 6y' + 25 = 0 \qquad (4.28)$$

$$y(0) = -3 \qquad (4.29)$$

$$y'(0) = -1 \qquad (4.30)$$

ลำดับแรกสังเกตว่าโดยทฤษฎีบทที่ 4.1 ปัญหาข้างต้นจะมีผลเฉลยเพียง 1 คำตอบ สำหรับทุก $x \in R$ เราจะต้องหาผลเฉลยเฉพาะรายของ (4.28) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (4.29) และ (4.30) เราหาผลเฉลยทั่วไปของ (4.28) แล้วจากตัวอย่างที่ 4.26 นั่นคือ

$$y = e^{3x}(c_1 \sin 4x + c_2 \cos 4x) \qquad (4.31)$$

เราจะพบว่า $\boldsymbol{y'} = e^{3x}[(3c_1 - 4c_2)\sin 4x + (4c_1 + 3c_2)\cos 4x]$ (4.32)

โดยเงื่อนไข (4.29) $y(0) = -3$ แทนใน (4.31)

ได้ $-3 = e^0(c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0)$

นั่นคือ $c2 = -3$ (4.33)

โดยเงื่อนไข (4.30) $y'(0) = -1$ แทนใน (4.32) จะได้

$$-1 = e^0[(3c_1 - 4c_2)\sin 0 + (4c_1 + 3c_2)\cos 0]$$

นั่นคือ $4c_1 + 3c_2 = -1$ (4.34)

โดยการแก้สมการ (4.33) และ (4.34) จะได้

$$c_1 = 2 \ , \ c_2 = -3$$

แทนค่า c_1 และ c_2 ใน (4.31) เราจะได้ผลเฉลยค่าเดียวของปัญหาค่าขอบเขตข้างต้น คือ

$$y = e^{3x}(2 \sin 4x - 3 \cos 4x)$$

โดยตรีโกณมิติ ผลรวมเชิงเส้นของ sin และ cos ของมุมเดียวกัน สามารถเขียนได้ในรูปของ sin คูณกับค่าคงตัว นั่นคือ ผลเฉลยข้างต้นสามารถเขียนได้ในรูปของ $\sin(4x+\varnothing)$ สำหรับค่า $\varnothing$ ที่เหมาะสม

จาก $y = e^{3x}(2 \sin 4x - 3 \cos 4x)$

คูณทั้งเศษและส่วนด้วย $\sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ จะได้

$$y = \sqrt{13}\, e^{3x}\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\sin 4x - \frac{3}{\sqrt{13}}\cos 4x\right]$$

ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

$$y = \sqrt{13}\, e^{3x} \sin(4x + \varnothing)$$

เมื่อ $\sin\varnothing = \dfrac{-3}{\sqrt{13}}$ และ $\mathrm{con}\,\varnothing = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$

    วิธีทำ　　　เฉลย ($y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$)

2. $y'' - 2y' - 3y = 0$

    วิธีทำ　　　เฉลย ($y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$)

3. $4y'' - 12y' + 5y = 0$

    วิธีทำ　　　เฉลย ($y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{\frac{5}{2}x}$)

4. $3y'' - 14y' - 5y = 0$

    วิธีทำ　　　เฉลย ($y = c_1 e^{\frac{-x}{3}} + c_2 e^{5x}$)

5. $2y'' - y' - 6y = 0$

    วิธีทำ　　　เฉลย ($y = c_1 e^{\frac{3x}{2}} + c_2 e^{-2x}$)

6. $2y'' + 3y' - 2y = 0$

    วิธีทำ　　　เฉลย ($y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{-2x}$)

7. $4y'' - 4y' + y = 0$

    วิธีทำ　　　เฉลย ($y = (c_1 + c_2 x)e^{\frac{1}{2}}$)

8. $y'' - 4y' + 4y = 0$

    วิธีทำ　　　เฉลย ($y = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$)

9. $y'' + 6y' + 11y = 0$

    วิธีทำ　　　เฉลย ($y = e^{-3x}\left(c_1 \cos\sqrt{2}\,x + c_2 \sin\sqrt{2}\,x\right)$)

10. $16y'' + 32y' + 25y = 0$

    วิธีทำ　　　เฉลย ($y = e^{-x}(c_1 \cos\frac{3}{4}x + c_2 \sin\frac{3}{4}x)$)

11. $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$

    วิธีทำ　　　เฉลย ($y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}$)

12. $y''' - 6y'' + 5y' + 12y = 0$

    วิธีทำ　　　เฉลย ($y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} + c_3 e^{3x}$)

13. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 0$

วิธีทำ　　　　เฉลย ($y = (c_1 + c_2x)\, e^{x} + c_3\, e^{3x}$)

14. $4y''' + 4y'' - 7y' + 2y = 0$

วิธีทำ　　　　เฉลย ($y = (c_1 + c_2x)\, e^{\frac{x}{2}} + c_3\, e^{-2x}$)

15. $y''' - y'' + y' - y = 0$

วิธีทำ　　　　เฉลย ($y = c_1\, e^{x} + c_2 \sin x + c_3 \cos x$)

16. $y''' + 4y'' + 5y' + 6y = 0$

วิธีทำ　　　　เฉลย ($y = c_1\, e^{-3x} + e^{\frac{-x}{2}} (c_2 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + c_3 \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x$))

17. $y'' - 8y' + 16y = 0$

วิธีทำ　　　　เฉลย ($y = (c_1 + c_2 x)\, e^{4x}$)

18. $4y'' + 4y' + y = 0$

วิธีทำ　　　　เฉลย ($y = (c_1 + c_2 x)\, e^{\frac{-x}{2}}$)

19. $y'' - 4y' + 13y = 0$

วิธีทำ　　　　เฉลย ($y = e^{2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$))

20. $y'' + 6y' + 25y = 0$

วิธีทำ　　　　เฉลย ($y = e^{-3x} (c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$))

21. $y'' + 9y = 0$

วิธีทำ　　　　เฉลย ($y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$)

22. $4y'' + y = 0$

วิธีทำ　　　　เฉลย ($y = c_1 \cos \frac{x}{2} + c_2 \sin \frac{x}{2}$)

23. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

วิธีทำ　　　　เฉลย ($y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)\, e^{\frac{-x}{2}}$)

24. $8y''' + 12y'' + 6y' + y = 0$

วิธีทำ　　　　เฉลย ($y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)\, e^{\frac{-x}{2}}$)

25. $y^{iv} = 0$

วิธีทำ เฉลย ($y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$)

26. $y^{iv} - y = 0$

วิธีทำ เฉลย ($y = c_1^{ex} + c_2 e^{-x} + c_3\cos x + c_4 \sin x$)

27. $y^{iv} + 8y'' + 16y = 0$

วิธีทำ เฉลย ($y = (c_1 + c_2 x) \cos 2x + (c_3 + c_4 x) \sin 2x$)

28. $y^{iv} - y''' - 3y'' + y' + 2y = 0$

วิธีทำ เฉลย ($y = (c_1 + c_2 x) e^{-x} + c_3^{ex} + c_4 e^{2x}$)

29. $y^{iv} - 3y''' - 2y'' + 2y' + 12y = 0$

วิธีทำ เฉลย ($(c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + e^{-x} (c_3 \cos x + c_4 \sin x)$)

30. $y^{iv} + 6y''' + 15y'' + 20y' + 12y = 0$

วิธีทำ เฉลย ($y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + e^{-x} (c_3 \cos \sqrt{2}\, x + c_4 \sin \sqrt{2}\, x$)

31. $y^{v} - 2y^{iv} + y''' = 0$

วิธีทำ เฉลย ($y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + (c_4 + c_5 x)e^{x}n \sqrt{2}\, x$)

32. $y^{v} + 5y^{iv} + 10y''' + 10y'' + 5y' + y = 0$

วิธีทำ เฉลย ($y = (c_1 + c_2 + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4)e^{-x}$)

33. $y^{vi} + 3y^{iv} + 3y'' + y = 0$

วิธีทำ เฉลย ($y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \cos x + (c_4 + c_5 x^2) \sin x$)

34. $y^{vi} - 6y''' + y = 0$

วิธีทำ เฉลย ($y = (c_1 + c_2 x)e^{x} + e^{\frac{-x}{2}} [(c_3 + c_4 x) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x +$

$(c_5 + c^6 x) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$)

35. $y^{iv} + y = 0$

วิธีทำ เฉลย ($y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} (c_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}}) + e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}}$

$(c_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + c_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}})$

36. $y^{vi} + 64y = 0$

วิธีทำ เฉลย $(y = e^{\sqrt{3}x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^{-\sqrt{3}x}(c_5\cos x + c_6\sin x) + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x))$

จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

37. $y'' + y' - 12y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 5$

วิธีทำ เฉลย $(y = 2e^{4x} + e^{-3x})$

38. $y'' + 7y' + 10y = 0,\ y(0) = -4,\ y'(0) = 2$

วิธีทำ เฉลย $(y = -6e^{-2x} + 2e^{-5x})$

39. $y'' - 6y' + 8y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 6$

วิธีทำ เฉลย $(y = -e^{2x} + 2e^{4x})$

40. $3y'' + 4y' - 4y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -4$

วิธีทำ เฉลย $(y = 2e^{-2x})$

41. $y'' + 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -3$

วิธีทำ เฉลย $(y = 2e^{-3x} + 3x e^{-3x})$

42. $4y'' - 12y' + 9y = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 9$

วิธีทำ เฉลย $(y = 4e^{\frac{3}{2}x} + 3x e^{\frac{3}{2}x})$

43. $y'' + 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 7$

วิธีทำ เฉลย $(y = 3e^{-2x} + 13xe^{-2x})$

44. $9y'' - 6y' + 6y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -7$

วิธีทำ เฉลย $(y = 3e^{-2x} + 13xe^{-2x})$

45. $y'' - 4y' + 29y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 5$

วิธีทำ เฉลย $(y = e^{2x}\sin 5x)$

46. $y'' + 6y' + 58y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 5$

วิธีทำ เฉลย $(y = e^{-3x}(\frac{2}{7}\sin 7x - \cos 7x))$

47. $y'' + 6y' + 13y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$

วิธีทำ เฉลย ($y = e^{-3x}(4 \sin 2x + 3 \cos 2x)$)

48. $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$

วิธีทำ เฉลย ($y = e^{-x}(4 \sin 2x + 2 \cos 2x)$)

49. $9y'' + 6y' + 5y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 6$

วิธีทำ เฉลย ($y = e^{\frac{-x}{3}}(\sin 2x + 6 \cos 2x)$)

50. $4y'' + 4y' + 37y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$

วิธีทำ เฉลย ($y = e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{-\sin 6x}{2} + 2 \cos 6x\right)$)

51. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$

วิธีทำ เฉลย ($y = e^{x} - 2e^{2x} + e^{3x}$)

52. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

วิธีทำ เฉลย ($y = e^{2x} - \sin 2e + \cos 2x$)

53. $y''' - 3y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -8$, $y''(0) = -4$

วิธีทำ เฉลย ($y = \frac{32}{9} e^{-x} - \frac{23}{9} e^{2x} + \frac{2}{3} x e^{2x}$)

54. $y''' - 5y'' + 9y - 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 6$

วิธีทำ เฉลย ($y = e^{x} + e^{2x}(2 \sin x - \cos x)$)

55. $y^{iv} - 3y''' + 2y'' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$, $y'''(0) = 2$

วิธีทำ เฉลย ($y = -2x + e^{x}$)

56. $y^{iv} - 16y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = 0$

วิธีทำ เฉลย ($y = e^{-2x} - \sin 2x$)

57. กำหนดให้

$$m^4 + 4m^3 + 10m^2 + 6m + 9 = (m^2 + 2m + 3)^2$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{iv} + 4y''' + 10y'' + 6y' + 9y = 0$$

วิธีทำ เฉลย ($y = e^{-x}\left[\left(c_1 + c_2 x\right)\sin\sqrt{2}x + \left(c_3 + c_4 x\right)\cos\sqrt{2}x\right]$)

58. กำหนดให้

$$m^4 + 2m^3 + 5m^2 + 4m + 4 = (m^2 + m + 2)^2$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{iv} + 2y''' + 5y'' + 4y' + 4 = 0$$

วิธีทำ เฉลย ($y = e^{-\frac{x}{2}}\left[\left(c_1 + c_2x\right)\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x + \left(c_3 + c_4x\right)\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x\right]$)

59. ถ้ารากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธ์อันดับ 10 มีดังนี้

4, 4, 4, 4, 2+3i, 2-3i, 2+3i, 2-3i, 2+3i, 2-3i

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้

วิธีทำ เฉลย ($y = (c_1+c_2+c_3x^2+c_4x^3)e^{4x}+e^{2x}[(c_5+c_6x+c_7x^2)\sin 3x + (c_8+c_9x+c_{10}x^2)\cos 3x]$)

60. ถ้ารากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธ์อันดับ 12 มีดังนี้

2, 2, 2, 2, 2, 2, 3+4i, 3-4i, 3+4i, 3-4i, 3+4i, 3-4i

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้

วิธีทำ เฉลย ($y = (c_1+c_2+c_3x^2+c_4x^3+c_5x^4+c_6x^5)e^{2x}+e^{3x}[(+c_7+c_8x+c_9x^2)\sin 4x + (c_{10}+c_{11}x+c_{12}x^2)\cos 4x]$)

61. กำหนดให้ $\sin x$ เป็นคำตอบของ

$$y^{iv} + 2y''' + 6y'' + 2y' + 5y = 0$$

จงหาผลเฉลยทั่วไป

วิธีทำ เฉลย ($y = c_1\sin x + c_2\cos x + e^{-x}(c_3\sin 2x + c_4\cos 2x)$)

62. กำหนดให้ $e^x \sin 2x$ เป็นคำตอบของ

$$y^{iv} + 3y''' + y'' + 13y' + 30y = 0$$

จงหาผลเฉลยทั่วไป

วิธีทำ เฉลย (ผลเฉลยทั่วไป คือ $y = e^x(c_1\sin 2x + c_2\cos 2x) + c_3e^{-3x} + c_4e^{-2x}$)