บทที่ 1

บทนำสมการเชิงอนุพันธ์

นิยาม 1.1 **สมการเชิงอนุพันธ์** คือสมการที่ประกอบด้วย อนุพันธ์ของตัวแปรตามที่เทียบกับ ตัวแปรอิสระ (ซึ่งอาจจะมีหลายตัวก็ได้) และตัวแปรทั้งสองแบบนี้ (คือตัวแปรตามและตัวแปรอิสระ)

ตัวอย่าง ของสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น

$$\frac{dy}{dx} = x + 5 \qquad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \qquad (2)$$

$$xy' + y - 3 = 0 \qquad (3)$$

$$y''' + 2(y'')^2 + y^2 - \cos x = 0 \qquad (4)$$

$$(y'')^2 + (y')^3 + 3y - x^2 = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y \qquad (7)$$

นิยาม 1.2 สมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์ที่เทียบกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว มีชื่อว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation)**

ตัวอย่างเช่น สมการที่ (1) ถึง (5)

นิยาม 1.3 สมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์ที่เทียบกับตัวแปรอิสระตั้งแต่สองตัว ขึ้นไป มีชื่อว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation)** ตัวอย่างเช่น สมการที่ (6) และ (7)

นิยาม 1.4 **อันดับ**ของสมการเชิงอนุพันธ์ **(order of differential equation)** คือ อันดับสูงสุด ของอนุพันธ์

ของตัวแปรที่ปรากฏในสมการนั้น

นิยาม 1.5 ถ้าสามารถทำให้ทุกๆอนุพันธ์ในสมการเชิงอนุพันธ์มีกำลังเป็นเลขจำนวนเต็มบวก แล้ว **ระดับขั้น (degree)** ของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นก็คือ เลขชี้กำลังของอนุพันธ์ซึ่งมีอันดับสูงสุด ที่ปรากฏอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

ตัวอย่างเช่น สมการ (1) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ระดับขั้น 1

(2) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ระดับขั้น 1

(3) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ระดับขั้น 1

(4) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 3 ระดับขั้น 1

(5) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ระดับขั้น 2

(6) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ระดับขั้น 1

(7) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ระดับขั้น 1

หมายเหตุ โดยทั่วไปเราเขียนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ในรูป $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$

โดยที่ F เป็นฟังก์ชันมี n + 2 ตัวแปร คือ $x, y, y', y'', ..., y^{(n)}$

นิยาม 1.6 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n (Linear ordinaly differential equation of order n) คือสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

$a_n(x), a_{n-1}(x), ..., a_1(x), a_0(x)$ และ f(x) เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงใดช่วงหนึ่งของจำนวนจริง และ $a_n(x) \neq 0$

ตัวอย่าง เช่น $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ 2

$\frac{d^4y}{dx^4} + x^2\frac{d^3y}{dx^3} + x^3\frac{dy}{dx} = x e^x$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ 4

นิยาม 1.7 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่ไม่ใช่สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น เรียกว่า

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น (A nonlinear ordinaly differential equation)

ตัวอย่าง สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

นิยาม 1.8 ฟังก์ชันใดๆ (ซึ่งไม่มีนิพจน์ของฟังก์ชันของอนุพันธ์) ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ เราจะเรียกฟังก์ชันนั้นว่าเป็น **ผลเฉลย (solution)** ของสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่าง 1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ $y'' - y = 0$ มี $y_1 = e^x$, $y_2 = 2e^{-x}$ และ $y_3 = c_1e^x+c_2e^{-x}$

เมื่อ c_1,c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ เป็นผลเฉลย

เพราะ $y_1'' = e^x$ ดังนั้น $y_1'' - y_1 = 0$

$y_2'' = 2e^{-x}$ ดังนั้น $y_2'' - y_2 = 0$

$y_3'' = c_1e^x+c_2e^{-x}$ ดังนั้น $y_3'' - y_3 = 0$

ตัวอย่าง 1.2 สมการเชิงอนุพันธ์ $y' = \dfrac{y+x}{y-x}$ มี $x^2-y^2+2xy = 1$ และ $x^2-y^2+2xy = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ เป็นผลเฉลย

ตัวอย่าง 1.3 สมการเชิงอนุพันธ์ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z$ มี $z = e^{3x}\sin 2y$ เป็นผล#

จากตัวอย่าง 1.1 y_1,y_2,y_3 ต่างเป็นผลเฉลย ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' - y = 0$ และ y_3 เป็นผลเฉลยที่มีค่าคงตัวอยู่ 2 ค่า เรียกค่าคงตัว c_1 , c_2นี้ว่า **ค่าคงตัวไม่เจาะจง (arbitrary constant)**

และเรียก y_3 ว่า**ผลเฉลยทั่วไป (general solution)**

ส่วน y_1 สามารถหาได้จาก y_3 โดยแทนค่า $c_1 = 1, c_2 = 0$

และ y_2 สามารถหาได้จาก y_3 โดยแทนค่า $c_1 = 0$, $c_2 = 2$

เรียก y_1 และ y_2ว่า **ผลเฉลยเฉพาะ (particular solution)**

นิยาม 1.9 ให้
$$F(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0 \qquad (8)$$
เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n

1. เรียกฟังก์ชัน $y = f(x, c_1, c_2,..., c_n) = 0$ เมื่อ $c_1,c_2,...,c_n$ เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง n ค่า ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ (8) ว่า **ผลเฉลยทั่วไป**

2. เรียกผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (8) ที่หาได้จากผลเฉลยทั่วไป โดยการกำหนดค่า $c_1,c_2,...,c_n$ ว่า **ผลเฉลยเฉพาะ**

3. เรียกผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (8) ที่ไม่สามารถหาได้จากผลเฉลยทั่วไป โดยการกำหนดค่า ว่า **ผลเฉลยซิงกูลาร์ (singular solution)**

ตัวอย่าง 1.4 สมการเชิงอนุพันธ์ $(y')^2 - xy' + y = 0$ มี $y = cx - c^2$ เป็นผลเฉลยทั่วไป และ เราสามารถทดสอบได้ว่า

$y = \dfrac{x^2}{4}$ เป็นผลเฉลยของสมการ แต่ ผลเฉลย $y = \dfrac{x^2}{4}$ นี้ไม่สามารถหาได้จาก ผลเฉลยทั่วไปโดย

การกำหนดค่า c ดังนั้นผลเฉลย $y = \frac{x^2}{4}$ จึงเป็นผลเฉลยซิงกูลาร์

ในที่นี้สมการเชิงอนุพันธ์ ที่เราจะกล่าวต่อไปจะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์สามัญจะมีผลเฉลยซิงกูลาร์น้อยมากเราจึงไม่สนใจ และโดยทั่วไปสมการเชิงอนุพันธ์ อาจมีผลเฉลยหรือ ไม่มีผลเฉลยก็ได้ หรือมีผลเฉลยแต่ไม่ใช่ผลเฉลยทั่วไป เช่น สมการ เชิงอนุพันธ์ $(y')^2 + 1 = 0$ จะไม่มีผลเฉลยสำหรับฟังก์ชันบนจำนวนจริง และ สมการ เชิงอนุพันธ์ $|y'| + |y| = 0$ มีแต่ ฟังก์ชัน $y = 0$ เป็นผลเฉลยเท่านั้น ซึ่งไม่มีผลเฉลยทั่วไป

ดังนั้นคำถามจึงมีอยู่ว่าถ้ามีสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n

1. จะรู้ได้อย่างไรว่ามีผลเฉลยทั่วไปหรือไม่มีผลเฉลยทั่วไป

2. ถ้ามีผลเฉลยทั่วไป จะมีเพียงผลเฉลยเดียวหรือไม่

3. วิธีการหาผลเฉลยทั่วไปนั้น

ต่อไปเมื่อใช้คำว่า สมการเชิงอนุพันธ์ ให้หมายถึง สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

นิยาม 1.10 ให้ $F(x,y,y',y'', \dots , y^{(n)}) = 0$ (9)

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n

ปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial value problems) คือปัญหาที่ประกอบด้วยการหา ผลเฉลย สมการ (9)

ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น n เงื่อนไขในรูป $y(x_0) = c_0$,$y'(x_0) = c_1$,..., $y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$

เมื่อ $x_0, c_0, c_1,\dots, c_{n-1}$ เป็นค่าคงตัว

ปัญหาเงื่อนไขขอบเขต (boundary value problems) คือปัญหาที่ประกอบด้วยการหา ผลเฉลย สมการ (9) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต n เงื่อนไข ที่กำหนดค่า y และ อนุพันธ์ของ y ณ ค่าของตัวแปร x ตั้งแต่ 2 ค่าขึ้นไป

ตัวอย่างปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น เช่น จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' + 2y' + y = \sin x$เมื่อ $y(0) = 0$, $y'(0) =1$

ตัวอย่างปัญหาเงื่อนไขขอบเขต เช่น จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' = ex$ เมื่อ $y(0) = 1$, $y'(2) = 5$

การมีอยู่ของผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว

ทฤษฎีบท 1.1 พิจารณาสมการอนุพันธ์ $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ (10)

ถ้า 1. ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่อง บนโดเมน D และ

2. อนุพันธ์ย่อย fy มีความต่อเนื่อง บนโดเมน D เช่นกัน

ให้ (x_0,y_0) เป็นสมาชิกใน D แล้ว จะมี $h > 0$ ที่ทำให้ สมการอนุพันธ์ (10) มีผลเฉลย $y = y(x)$ เพียงผลเฉลยเดียวสำหรับทุก x บน ช่วง $|x - x_0| < h$ที่สอดคล้องเงื่อนไข $y(x_0) = y_0$

(สำหรับผู้สนใจสามารถดูการพิสูจน์จากหนังสือ Differential Equation ของ Shepley L. Ross)

ทฤษฎีบท 1.2 พิจารณาสมการอนุพันธ์ $\dfrac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'',\dots, y^{(n)})$ (11)

ถ้า 1. ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่อง บนโดเมน D และ

2. มีค่าคงตัว $k > 0$ ที่ทำให้ $| f(x,x_1,x_2,\dots,x_n) - f(x,y_1,y_2,\dots,y_n) | < k (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|)$

เมื่อ $(x,x_1,x_2,\dots,x_n)$, $(x,y_1,y_2,\dots,y_n)$ เป็นสมาชิกใน D

ให้ $(x_0,c_0,c_1,\dots,c_{n-1})$ เป็นสมาชิกใน D แล้ว จะมี $h > 0$ ที่ทำให้ สมการอนุพันธ์ (11) มีผลเฉลย $y = y(x)$ เพียงผลเฉลยเดียวสำหรับทุก x บน ช่วง $|x - x_0| < h$

ที่สอดคล้องเงื่อนไข $y(x_0) = c_0$, $y'(x_0) = c_1$, $y''(x_0) = c_2$,..., $y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$

(สำหรับผู้สนใจสามารถดูการพิสูจน์จากหนังสือ Differential Equation ของ Shepley L. Ross)