บทที่ 2
สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและระดับขั้นหนึ่ง

สมการเชิงอนุพันอันดับหนึ่งและระดับขั้นหนึ่ง มีรูปแบบทั่วไปคือ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

และจาก ทฤษฎีบท 1.1 เราทราบเงื่อนไขที่สมการ (1)มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวแล้วสิ่งที่สนใจต่อไปก็คือวิธีการหาผลเฉลย

เนื่องจากเคยทราบมาแล้วว่า ถ้ามีฟังก์ชัน $y = y(x)$ โดยที่ y สามารถหาอนุพันธ์ที่ x ใด ๆ แล้วเราสามารถกำหนดผลต่างอนุพัทธ์ของ y $(dy) = y'(x)\,dx$ ดังนั้นจากสมการ (1) เราอาจเปลี่ยนเป็นรูปสมการใหม่ดังนี้

$$dy = f(x,y)\,dx \text{ หรือ } dy - f(x,y)\,dx = 0$$

ซึ่งเป็นรูปแบบหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์ ในรูปแบบของผลต่างอนุพัทธ์

ในทางกลับกันสมการเชิงอนุพันธ์ ในรูปแบบของผลต่างอนุพัทธ์

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{2}$$

ถ้า $N(x,y) \neq 0$ เราสามารถเปลี่ยนสมการ (2) เป็น สมการ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ (3)

และ ถ้า $M(x,y) \neq 0$ เราสามารถเปลี่ยนสมการ (2) เป็น สมการ $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{N(x,y)}{M(x,y)}$ (4)

ซึ่งสมการ (4) คือสมการเชิงอนุพันธ์ ที่มี x เป็นฟังก์ชันของ y

สำหรับทุก (x,y) ที่ทำให้ $M(x,y) = N(x,y) = 0$ สมการ (3) และ สมการ (4) จะไม่มีความหมาย แต่สมการ (2) จะมีผลเฉลยได้มากมายซึ่งไม่น่าสนใจ

อย่างไรก็ตาม สมการ (2) สามารถหาผลเฉลยในรูปแบบฟังก์ชัน $y(x)$ หรือ ฟังก์ชัน $x(y)$ ซึ่งก็จะเป็นผลเฉลยของสมการ (1) และในบทกลับก็เป็นจริงด้วยดังนั้นในบทนี้เราจะกล่าวถึงวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและระดับขั้นหนึ่ง ซึ่งอาจจะอยู่ในรูปสมการ (1) หรืออยู่ในรูปสมการ (2) เมื่อ $N(x,y) \neq 0$ และ $M(x,y) \neq 0$

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์แบบตัวแปรแยกกันได้ (Variables Seperable Equations)

ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ สามารถจัดให้อยู่ในแบบ

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \qquad (5)$$

โดยที่ $M(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ตัวเดียว

และ $N(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y ตัวเดียว

แล้วเราจะเรียกสมการ (5) ว่าเป็น**แบบตัวแปรแยกกันได้** **(variable seperable)** ซึ่งจะหาผลเฉลยได้ทันที โดยการอินทิเกรตจะได้ผลเฉลยในรูป

$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง และจะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

ตัวอย่าง 2.1.1 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{(y+1)^2}$

วิธีทำ จาก $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{(y+1)^2}$ จัดสมการใหม่ได้เป็น $(y + 1)^2dy - x^3dx = 0$

อินทิเกรตได้ $\frac{(y+1)^3}{3} + \frac{x^4}{4} = C$

หรือ $4(y + 1)^3 + 3x^4 = C$ #

ตัวอย่าง 2.1.2 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} + \frac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0$

วิธีทำ จัดสมการใหม่ได้เป็น $xy^2(1+ x^2)\ dy + (1+ y^3)dx = 0$

หรือ
$$\frac{y^2}{1+y^3}dy + \frac{1}{x(1+x^2)}dx = 0$$

$$\frac{y^2}{1+y^3}dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{(1+x^2)}\right)dx = 0$$

$$\frac{y^2}{1+y^3}dy + \frac{1}{x}dx - \frac{x}{(1+x^2)}dx = 0$$

อินทิเกรตได้
$$\frac{1}{3}\ln|1+y^3| + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = C$$

$$\ln\frac{x^6(1+y^3)^2}{(1+x^2)^3} = 6C$$

$$\frac{x^6(1+y^3)^2}{(1+x^2)^3} = e^{6C} = C_1 \qquad \#$$

ตัวอย่าง 2.1.3 จงหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น $(3x+xy^2)dx - (y+x^2y)dy = 0$ เมื่อ $y(1) = -3$

วิธีทำ จัดสมการใหม่ได้ $x(3 + y^2)\, dx - y(1 + x^2)\, dy = 0$

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right) dx - \left(\frac{y}{3+y^2}\right) = 0$$

อินทิเกรตได้ $\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - \frac{1}{2}\ln(3 + y^2) = c$

จาก $y(1) = 3$ ทำให้ได้ $\frac{1}{2}\ln(1 + 1) - \frac{1}{2}\ln(3 + 9) = c$

$$\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 12 = c$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{6}\right) = c$$

ดังนั้น ผลเฉลยคือ $\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - \frac{1}{2}\ln(3 + y^2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{6}\right)$

หรือ $6(1 + x^2) = (3 + y^2)$ #

แบบฝึกหัด 2.1

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1) $x(x + 3)\,dy - y(2x + 3)\,dx = 0$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^3}{1+x^2}$

3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos^2 y}{\sin^2 x}$

4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(y-1)(x-2)(y+3)}{(x-1)(y-2)(x+3)}$

5) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{4x-x^2}$

6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y}{x(y-3)}$

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ตามเงื่อนไขที่กำหนด

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+xy^2}{y}$, $y(1) = 0$

8. $2y \cos x\, dx + 3\sin x\, dy = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 2$

9. $\sin^2 y\, dx + \cos^2 x\, dy = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

10. $\dfrac{dI}{dt} + 5I = 10$, $I(0) = 0$

11. $x \sin y\, dx + (x2 + 1)\, dy = 0$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$

12. $8 \cos^2 y\, dx + \csc^2 x\, dy = 0$, $y(\frac{\pi}{12}) = \frac{\pi}{4}$

2.2 สมการเอกพันธ์ (Homogeneous Equations)

นิยาม 2.2.1 เราจะเรียกฟังก์ชัน f(x,y) ว่าเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ระดับขั้น n ก็ต่อเมื่อ $f(kx, ky) = k^n f(x,y)$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ ที่ไม่ใช่ 0

ตัวอย่าง 2.2.1 $f(x,y) = x^4 - x^3y$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับขั้น 4

เพราะว่า
$$\begin{aligned} f(kx,ky) &= (kx)^4 - (kx)^3(ky) \\ &= k^4x^4 - k^4x^3y \\ &= k^4(x^4 - x^3y) \\ &= k^4 f(x,y) \end{aligned}$$
#

ตัวอย่าง 2.2.2 $f(x,y) = ex^{\frac{y}{x}} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับขั้น 0

เพราะว่า
$$\begin{aligned} f(kx,ky) &= ex^{\frac{ky}{kx}} + \tan\left(\frac{ky}{kx}\right) \\ &= ex^{\frac{y}{x}} + \tan\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= k^0 f(x,y) \end{aligned}$$
#

ตัวอย่าง 2.2.3 $f(x,y) = x^2 + \cos x \sin y$ ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์

เพราะว่า
$$\begin{aligned} f(kx,ky) &= (kx)^2 + \cos kx \sin ky \\ &= k^2x^2 + \cos kx \sin ky \neq k^n f(x,y) \end{aligned}$$
#

สมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ จะเรียกว่าสมการเอกพันธ์ถ้าสามารถจัดให้อยู่ในรูปสมการ

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (6)$$

โดยที่ M(x,y) และ N(x,y) เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ที่มีระดับขั้นเท่ากัน

ตัวอย่าง 2.2.4 $x \ln \frac{y}{x} dx + \frac{y^2}{x} \arcsin \frac{y}{x} dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธ์ระดับขั้น 1 #

ตัวอย่าง 2.2.5 $(x^2 + y^2)\,dx - (xy^2 - y^3)\,dy = 0$ ไม่เป็นสมการเอกพันธ์ #

การแก้สมการเอกพันธ์ทำได้โดยการเปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $v = \frac{y}{x}$

ดังนั้น $y = vx$ จะได้ $dy = x\,dv + v\,dx$ ไปแทนค่าในสมการ (6) จะได้สมการ

$$M(x,vx)\,dx + N(x,vx)\,(x\,dv + v\,dx) = 0$$

$$(M(x,vx) + vN(x,vx))\,dx + xN(x,vx)\,dv = 0$$

$[x^kM(1,v) + vx^k N(1,v)]\,dx + xx^kN(1,v)\,dv = 0$ เมื่อ k คือระดับขั้นของ M(x,y) และ N(x,y)

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,v)}{M(1,v) + vN(1,v)}dv = 0$$

ซึ่งเป็นสมการแบบตัวแปรแยกกันได้ จากนั้นใช้การแก้สมการแบบตัวแปรแยกกันได้หาผลเฉลยต่อไป

หมายเหตุ 1. ถ้าสมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธ์ เราสามารถจัดอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})}$$

ซึ่งฟังก์ชัน $-\frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})}$ เป็นฟังก์ชันของ $\frac{y}{x}$ สามารถเขียนใหม่เป็น $F(\frac{y}{x})$

นั่นคือ สมการเอกพันธ์สามารถเขียนอยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} = F(\frac{y}{x})$

2. วิธีหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์สามารถแทนค่า $v = \frac{y}{x}$ ก็ได้การที่จะเลือกแทนค่า $v = \frac{y}{x}$ หรือ $v = \frac{x}{y}$ ก็ขึ้นกับว่า วิธีไหนจะสะดวกกว่ากัน

ตัวอย่าง 2.2.6 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $2xy\,dy = (x^2-y^2)\,dx$

วิธีทำ จะเห็นได้ว่าเป็นสมการเอกพันธ์ระดับขั้น 2

ให้ $v = \frac{y}{x}$ ดังนั้น $y = xv$ และ $dy = xdv + vdx$ จะได้

$$2x^2 v(x\,dv + v\,dx) - (x^2 - x^2 v^2)\,dx = 0$$

$$2x^3 v\,dv + 2x^2 v^2\,dx - x^2\,dx + x^2 v^2\,dx = 0$$

$$2x^3 v\,dv + (3x^2 v^2 - x^2)\,dx = 0$$

$$2x^3 v\,dv + x^2(3v^2 - 1)\,dx = 0$$

$$\frac{2v}{(3v^2-1)}dv + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\frac{1}{3}\ln(3v^2 - 1) + \ln x = \ln C_1$$

$$x(3v^2 - 1)^{\frac{1}{3}} = C$$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$

$$x^{\frac{1}{3}}(3y^2 - x^2)^{\frac{1}{3}} = C \qquad \#$$

ตัวอย่าง 2.2.7 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $(1 + 2e^{\frac{x}{y}})\, dx + 2e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})\, dy = 0$

วิธีทำ เป็นสมการเอกพันธ์ระดับขั้น 0

ให้ $v = \frac{x}{y}$ ดังนั้น $x = vy$ และ $dx = v\,dy + y\,dv$ จะได้

$$(1 + 2e^{v})(vdy + ydv) + 2e^{v}(1 - v)\,dy = 0$$

$$y(1 + 2e^{v})dv + [v(1 + 2e^{v}) + 2e^{v}(1 - v)]\,dy = 0$$

$$y(1 + 2e^{v})\,dv + (v + 2e^{v})\,dy = 0$$

$$\frac{1 + 2e^{v}}{v + 2e^{v}}dv + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\ln(v + 2e^{v}) + \ln y = \ln C_1$$

$$y(v + 2e^{v}) = C$$

แทนค่า $v = \frac{x}{y}$

$$x + 2ye^{\frac{x}{y}} = C \qquad \#$$

แบบฝึกหัด 2.2

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1) $xdy - ydx - \sqrt{x^2 - y^2}\, dx = 0$

2) $(2x \sinh \frac{y}{x} + 3y \cosh \frac{y}{x})\, dx - 3x \cosh \frac{y}{x} dy = 0$

3) $(2x + 3y)dx + (y - x)dy = 0$

4) $x \sin \frac{y}{x}(ydx + xdy) + y \cos \frac{y}{x}(xdy - ydx) = 0$

5) $(x^2 - 2y^2)dy + 2xy\, dx = 0$

6) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sec^2 \frac{y}{x}$

7) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + \frac{x^3}{y} + x \tan \frac{y}{x^2}$, โดยการแทนค่า $y = vx^2$

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ตามเงื่อนไขที่กำหนด ในข้อ 8) ถึง 9)

8. $y(2x2 - xy + y2)\, dx - x2(2x - y)\, dy = 0, y(1) = \frac{1}{2}$

9. $v(3x + 2v)\, dx - x2\, dv = 0$, $v(1) = 2$

10. ให้ $M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธ์ จงแสดงว่า โดยการเปลี่ยนตัวแปร $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ จะทำให้สมการที่ได้เป็นสมการแบบตัวแปรแยกกันได้ ในตัวแปร r และ θ

11. ให้ F(x,y) เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ระดับขั้น n จงแสดงว่า สมการเชิงอนุพันธ์ในรูป

$y^n f(x)\, dx + F(x,y)\,(y\, dx - xdy) = 0$

สามารถหาผลเฉลยได้โดยการแทนค่า y = xv

2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ในรูป $F\left[\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right]$ (7)

เมื่อ a_1 ,b_1 ,c_1,a_2,b_2 และ c_2 เป็นจำนวนจริง

กรณีที่1 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ เราสามารถแปลงสมการ (7) เป็นสมการเอกพันธ์ได้ โดยให้

$u = x - h$ และ $v = y - k$ เมื่อ h, k เป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

$a_1x+b_1y+c_1 = 0$

และ $a_2x+b_2y+c_2 = 0$

จาก $u = x - h$ และ $v = y - k$ จะได้ $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{dy}{dx}$

แทนค่าในสมการ (7) จะได้ $\dfrac{dv}{du} = F\left[\dfrac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right] = F\left[\dfrac{a_1+b_1\frac{v}{u}}{a_2+b_2\frac{v}{u}}\right]$

ซึ่งเป็นสมการเอกพันธ์ จึงใช้วิธีการหาผลเฉลยซึ่งได้ศึกษามาแล้วในหัวข้อ 2.2

กรณีที่ 2 $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ดังนั้น จะมีค่าคงตัว m ที่ทำให้ $a_1x + b_1y = m(a_2x + b_2y)$

ให้ $u = a_2x + b_2y$, $\dfrac{du}{dx} = a_2 + b_2\dfrac{dy}{dx}$

แทนค่าในสมการ (7) จะได้ $\dfrac{du}{dx} = a_2 + b_2F\left[\dfrac{mu+c_1}{u+c_2}\right]$

ซึ่งเป็นสมการแบบตัวแปรแยกกันได้ จึงใช้วิธีการหาผลเฉลยซึ่งได้ศึกษามาแล้วในหัวข้อ 2.1

ตัวอย่าง 2.3.1 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $(x - 2y + 1)\,dx + (4x - 3y - 6)\,dy = 0$ (8)

วิธีทำ จากสมการ(8) จะได้ว่า $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $b_1 = -2$ และ $b_2 = -3$ ซึ่ง $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

หา h, k ที่สอดคล้องระบบสมการ $h - 2k + 1 = 0$

$$4h - 3k - 6 = 0$$

จะได้ $h = 3$, $k = 2$ โดยการเปลี่ยนตัวแปร ให้

$u = x - 3$ ดังนั้น $du = dx$

$v = y - 2$ ดังนั้น $dv = dy$

แทนในสมการ (8) จะได้ $(u - 2v)\,du + (4u - 3v)\,dv = 0$ (9)

ซึ่งคือ สมการเอกพันธ์ ให้ $w = \dfrac{v}{u}$ หรือ $v = uw$ ได้ $dv = u\,dw + w\,du$ แทนในสมการ

(9) ได้

$$(1 - 2w)\ du\ + (4 - 3w)\ (u\ dw + w\ du) = 0$$

$$(1 - 2w + 4w - 3w2)\ du + u(4 - 3w)\ dw = 0$$

$$\frac{du}{u} + \left(\frac{4-3w}{1+2w-3w^2}\right)dw = 0$$

อินทิเกรดได้ $\ln u + \frac{1}{2}\ln(3w^2-2w-1) - \frac{3}{4}\ln\left[\frac{3w-3}{3w+1}\right] = C$

หรือ $\ln(3w^2-2w-1)^2 - \ln\left[\frac{3w-3}{3w+1}\right]^3 = \ln\left(\frac{C}{u^4}\right)$

หรือ $u^4\ (3w + 1)^5 = c(w - 1)$

แทนค่า $w = \frac{v}{u}$ ได้ $(3v + u)5 = c(v - u)$

แทนค่า $u = x - 3$, $v = y - 2$ ได้ $(x + 3y - 9)^5 = c\ (\ y - x + 1)$ #

ตัวอย่าง 2.3.2 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $(x + 2y + 3)\ dx + (2x + 4y - 1)\ dy = 0$ (10)

วิธีทำ จากสมการ(10) จะได้ว่า $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_1 = 2$ และ $b_2 = 4$ ซึ่ง $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

ให้ $u = x + 2y$, $du = dx + 2dy$ แทนในสมการ (10) ได้

$$(u + 3)\ dx + (2u - 1)\left(\frac{du-dx}{2}\right) = 0$$

$$7\ dx + (2u - 1)\ du = 0$$

อินทิเกรดได้ $7x + u^2 - u = c$

แทนค่า $u = x + 2y$ ได้ $7x + (x + 2y)2 - x + 2y) = c$

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x - 2y = c$$ #

แบบฝึกหัด 2.3

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(5x + 2y + 1)\,dx + (2x + y + 1)\,dy = 0$

2. $(3x - y + 1)\,dx - (6x - 2y - 3)\,dy = 0$

3. $(x - 2y - 3)\,dx + (2x + y - 1)\,dy = 0$

4. $(10x - 4y + 12)\,dx - (x + 5y + 3)\,dy = 0$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{x - 3y - 5}{x + y - 1}\right)^2$

6. $\sqrt{x + y + 1}\,\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x + y - 1}$

7. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+3y} + 1$

8. $\dfrac{dy}{dx} = \tan^2(x+y)$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(x + y + 1)^2}$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{(x + 2y - 3)}$

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ตามเงื่อนไขที่กำหนด

11. $(6x + 4y + 1)\,dx + (4x + 2y + 2)\,dy = 0, \quad y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3$

12. $(3x - y - 6)\,dx + (x + y + 2)\,dy = 0, \quad y(2) = -2$

13. $(2x + 3y + 1)\,dx + (4x + 6y + 1)\,dy = 0, \quad y(-2) = 2$

14. $(4x + 3y + 1)\,dx + (x + y + 1)\,dy = 0, \quad y(3) = -4$

2.4 สมการแม่นตรง (Exact Equation)

นิยาม 2.4.1 สมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ จะเรียกว่าเป็นสมการแม่นตรง ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $F(x,y)$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ เรียก $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ว่าเป็นผลต่างอนุพัทธ์แม่นตรง (Exact differential) ของ x และ y

ดังนั้น สมการจะมีแบบเป็น $dF(x,y) = 0$

ซึ่งจะมีผลเฉลยเป็น $F(x,y) = C$

ตัวอย่าง 2.4.1 สมการ $y^2dx + 2xy\,dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรงเพราะว่า

$$d(xy^2) = y^2\,dx + 2xy\,dy$$ #

ตัวอย่าง 2.4.2 สมการ $\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$ เป็นสมการแม่นตรง เพราะว่า

$$d\left(\ln\frac{y}{x}\right) = \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x}$$ #

โดยทั่วไปคงไม่ง่ายนักในการที่จะบอกว่าสมการใดเป็นสมการแม่นตรง และสมการใดไม่ใช่สมการแม่นตรง

ดังนั้นจึงมีทฤษฎีที่จะช่วยในการทดสอบและหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการที่จะบอกได้ว่าสมการใดเป็นสมการแม่นตรง

ทฤษฎีบท 2.4.1

ถ้า $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ และ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง บน $D = \{ (x,y) : a < x < b , c < y < d \}$

แล้ว สมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง ก็ต่อเมื่อ $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{x}$

ทุกค่า (x,y) บน D

พิสูจน์ ให้ $M(x,y)\,dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง

ดังนั้น จะมี F(x,y) ที่ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ และ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

เพราะฉะนั้น $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x}$ และ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$

แต่ $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ และ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกค่า x,y บน Dทำให้

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \qquad \text{ทุกค่า x,y บน D}$$

ดังนั้นได้ $$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$ ทุกค่า x,y บน D

พิสูจน์ในทางกลับ ให้ $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ ทุกค่า x,y บน D จะต้องหา ฟังก์ชัน F(x,y) ที่ทำให้

$$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

แต่จาก $$d\,F(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy$$

นั่นคือจะหาฟังก์ชัน F(x,y) ที่ทำให้ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ และ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ ทุกค่า x,y บน D

ก่อนอื่นจะแสดงว่า $N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$ เป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียวโดยจะแสดงว่า

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] = 0$$

เพราะ

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] &= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] \\ &= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right] \\ &= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \\ &= 0 \qquad \text{(จากข้อกำหนด)}\end{aligned}$$

ดังนั้น ให้ $F(x,y) = \int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy$

จะได้ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$

และ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

ดังนั้นสมการ M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 เป็นสมการแม่นตรง #

จากผลของการพิสูจน์ ทำให้ได้ว่า ถ้า M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 เป็นสมการแม่นตรง แล้วผลเฉลยคือ

$$\int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy = C$$

และผู้อ่านสามารถพิสูจน์ในทำนองเดียวกันว่าฟังก์ชัน F(x,y) อาจหาได้อีกวิธีหนึ่งคือ

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + \int\left[M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dx\right]dx$$

จากตัวอย่าง 2.4.1 เราจะเห็นได้ง่ายว่า $\frac{\partial y^2}{\partial y} = 2y = \frac{\partial 2xy}{\partial x}$ และ

$$F(x,y) = \int y^2 dx + \int\left[2xy - \frac{\partial}{\partial y}\int y^2 dx\right]dy = xy^2$$

และตัวอย่าง 2.4.2 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$F(x,y) = \int -\frac{1}{x}dx + \int\left[\frac{1}{y} - \frac{\partial}{\partial y}\int -\frac{1}{x}dx\right]dy = \ln\frac{y}{x}$$

การหาผลเฉลยของสมการแม่นตรง นอกจากจะหาฟังก์ชัน F(x,y) ดังกล่าวแล้ว ก็อาจจะกระทำได้โดยอีกวิธีหนึ่งซึ่งเรียกวิธีนี้ว่าวิธีการจัดกลุ่ม (Method of Grouping) ของตัวแปรของสมการให้เหมาะสมดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.4.3 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $2xy\,dx + (x^2 + \cos y)\,dy = 0$

วิธีทำ $M(x,y) = 2xy$, $N(x,y) = x^2 + \cos y$

ดังนั้น $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

เพราะฉะนั้น จึงเป็นสมการแม่นตรง โดยจัดกลุ่มของสมการใหม่จะได้

$$(2xy\,dx + x^2dy) + \cos y\,dy = 0$$

$$d(x^2y) + d\sin y = dc$$

อินทิเกรตได้ $x^2y + \sin y = c$ #

ตัวอย่าง 2.4.4 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $(3x^2 + 4xy)\,dx + (2x^2 + 2y)\,dy = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 4xy) = 4x = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + 2y)$

ดังนั้น จึงเป็นสมการแม่นตรง โดยการจัดกลุ่มของสมการ จะได้

$$3x^2\,dx + (4xy\,dx + 2x^2)dy + 2ydy = 0$$

$$dx^3 + d(2x^2y) + dy^2 = dc$$

อินทิเกรตได้ $x^3 + 2x^2y + y^2 = c$ #

ตัวอย่าง 2.4.5 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $(2x \cos y + 3x^2y)\,dx + (x^3 - x^2\sin y - y)dy = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก

ดังนั้นจึงเป็นสมการแม่นตรง โดยการจัดกลุ่มของสมการจะได้

$$(2x \cos y\, dx - x^2 \sin y\, dy)+ (3x^2 y\, dx + x3dy)- y\, dy = 0$$

$$d (x^2\cos y)+ d (x^3y) - d(\frac{y^2}{2}) = dc$$

อินทิเกรตได้ $x^2 \cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = c$ #

พิจารณาสมการ $ydx + 2x\, dy = 0$ จะเห็นได้ว่า สมการนี้ไม่เป็นสมการแม่นตรงเพราะ $\frac{\partial y}{\partial y} = 1$ และ $\frac{\partial 2x}{\partial x} = 2$ แต่สมการนี้สามารถทำให้เป็นสมการแม่นตรงได้โดยการนำ y ไปคูณสมการจะได้ $y^2\, dx + 2xy\, dy = 0$ ซึ่งจะเป็นสมการแม่นตรง

นิยาม 2.4.2 เราจะเรียกฟังก์ชัน u(x,y) ว่าเป็น**ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต (integrating factor)** ของสมการ $M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$ ก็ต่อเมื่อ $u(x,y)[M(x,y)dx+N(x,y)dy] = 0$ เป็นสมการแม่นตรง

ตัวอย่าง 2.4.6 $\frac{1}{x^2}$ เป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตของ $x\, dy - y\, dx = 0$

เพราะเมื่อนำ $\frac{1}{x^2}$ คูณสมการตลอดจะได้ $\frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0$ ซึ่งเป็นสมการแม่นตรง #

ตัวอย่าง 2.4.7 $\frac{1}{xy}$ เป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตของ $x\, dy - y\, dx$

เพราะเมื่อนำ $\frac{1}{xy}$ คูณสมการตลอดจะได้ $\frac{1}{y}dy - \frac{1}{x}dx = 0$ ซึ่งเป็นสมการแม่นตรง #

จากตัวอย่าง 2.4.6 และตัวอย่าง 2.4.7 เราจะเห็นได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์หนึ่งอาจจะมีตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตได้มากกว่า 1 ตัวประกอบก็ได้

สิ่งที่สนใจก็คือสมการเชิงอนุพันธ์ทุกสมการมีตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต หรือไม่ ? และการหาตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตจะหาได้อย่างไร ซึ่งจะขอพิจารณาดังนี้

ถ้า u(x,y) จะเป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตของสมการ $M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$ แล้ว u(x,y) จะต้องมีคุณสมบัติที่ทำให้สมการ $u(x,y)M(x,y)\, dx + u(x,y)N(x,y)\, dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง

ซึ่งจาก ทฤษฎีบท 2.4.1 ทำให้ได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x, y)M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x, y)N(x, y)$$

$$u(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}+M(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=u(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}+N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$
$$u(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-u(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-M(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$
$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{u(x,y)}\left[N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-M(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right]$$
(11)

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งยังไม่สามารถรู้ผลเฉลยได้ในตอนนี้ แต่จะศึกษา u(x,y) ในบางกรณีเท่านั้น

กรณีที่ 1 u(x,y) เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว

ถ้า u(x,y) เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว เราเขียน u(x,y) = $\mu(x)$

ทำให้สมการ (11) กลายเป็น

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{N(x,y)}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx}$$
$$\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]=\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx} \qquad (12)$$

สมการ (12) จะมีความหมายเมื่อ

$$\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]$$

เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว และจะทำให้ สมการ (12) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญระดับขั้นหนึ่ง ที่จะหา $\mu(x)$ ได้ โดย

$$\ln(\mu(x))=\int \frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]dx$$
$$\mu(x)=e^{\int \frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]dx}$$

กรณีที่ 2 u(x,y) เป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว ก็สามารถพิจารณา u(x,y) ได้ในทำนองเดียวกัน

จาก กรณีที่1 และ กรณีที่ 2 ทำให้ได้ ทฤษฎีบท ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.4.2 ถ้าสมการ M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 มีคุณสมบัติว่า

$$\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] = f(x)$$ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียวแล้ว

u(x) = $u(x)=e^{\int f(x)dx}$ จะเป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต

พิสูจน์ u(x) จะเป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต ถ้า u(x)M(x,y) dx + u(x)N(x,y) dy = 0 เป็นสมการแม่นตรง

นั่นคือ จะแสดงว่า $\frac{\partial}{\partial y}$ u(x)M(x,y) = $\frac{\partial}{\partial x}$ u(x)N(x,y)

เนื่องจาก $\frac{\partial}{\partial y}$ u(x)M(x,y) = u(x) $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ + M(x,y) $\frac{\partial u(x)}{\partial y}$

และ u(x) เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว ดังนั้น $\frac{\partial u(x)}{\partial y} = 0$

จึงได้ว่า $\frac{\partial}{\partial y}$ u(x)M(x,y) = u(x) $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$

และ

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x)N(x,y) = u(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} + N(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x}$$
$$= u(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} + N(x,y)\frac{\partial e^{\int f(x)dx}}{\partial x}$$
$$= u(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} + N(x,y)\, e^{\int f(x)dx} f(x)$$
$$= u(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} + N(x,y)u(x)\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]$$
$$= u(x)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$$

ดังนั้นเราจึงได้ว่า u(x) M(x,y) dx + u(x) N(x,y) dy = 0 เป็นสมการแม่นตรง

นั่นคือ u(x) เป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตของ M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 #

ทฤษฎีบท 2.4.3 ถ้าสมการ M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0 มีคุณสมบัติว่า

$$\frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right] = g(y)$$ เป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว

แล้ว $u(y) = e^{\int g(y)dy}$ จะเป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตของสมการ M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0

พิสูจน์ ใช้การพิสูจน์ทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 2.4.2 #

ตัวอย่าง 2.4.8 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $(x^2 + y^2 + x)\,dx + xy\,dy = 0$ (13)

วิธีทำ เพราะว่า $\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + x) = 2y$ และ $\frac{\partial}{\partial x} xy = y$ สมการนี้ไม่ใช่สมการแม่นตรง

แต่ $\frac{1}{xy}(2y - y) = \frac{1}{x} = f(x)$ ดังนั้น $\int f(x)dx = \ln x$

และ $e^{\int f(x)dx} = e^{\ln x} = x$

ดังนั้นจากทฤษฎีบท 2.4.2 x เป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต

นำ x คูณสมการ (13) ตลอดจะได้

$$(x^3 + x y^2 + x^2)\,dx + x^2 y\,dy = 0$$

$$(x^3 + x^2)\,dx + d\left(\frac{x^2y^2}{2}\right) = 0$$

อินทิเกรต $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2} = C1$

หรือ $3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 = C$ #

ตัวอย่าง 2.4.9 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0 \qquad (14)$$

วิธีทำ เพราะว่า $\frac{\partial}{\partial y}(2xy^4e^y + 2xy^3 + y) = 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1$

และ $\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x) = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3$

ดังนั้น สมการนี้ไม่ใช่สมการแม่นตรง

แต่ $\frac{(2xy^4e^y - 2xy^2 - 3 - 8xy^3e^y - 2xy^4e^y - 6xy^2 - 1)}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y} = \frac{-8xy^3e^y - 8xy^2 - 4}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y}$

$= \frac{-4}{y} = g(y)$

ดังนั้น $\int g(y)dy = -4\ln y$ และ $e^{\int g(y)dy} = e^{-4\ln y} = y^{-4}$

นำ y^{-4} คูณสมการ(14) ตลอดจะได้

$$(2xe^y + 2xy^{-1} + y^{-3})dx + (x^2e^y - x^2y^{-2} - 3xy^{-4})dy = 0$$

$$(2xe^y dx + x^2e^y dy) + (2xy^{-1}dx - x^2y^{-2}\,dy) + (y^{-3}dx - 3xy^{-4})\,dy) = 0$$

$$d(x^2e^y) + d(x^2y^{-1}) + d(xy^{-3}) = 0$$

อินทิเกรตได้ $x^2e^y + x^2y^{-1} + xy^{-3} = C$ #

แบบฝึกหัด 2.4

จงทดสอบว่าสมการใดเป็นสมการแม่นตรง และถ้าเป็นสมการแม่นตรงให้แก้สมการหาผลเฉลยด้วย

1) $(x^2 - y)dx - x\,dy = 0$

2) $y(x - 2y)dx - x^2\,dy = 0$

3) $(x^2 + y^2)dx + xy\,dy = 0$

4) $(x + y\cos x)dx + \sin x\,dy = 0$

5) $dx - \sqrt{a^2 - x^2}\,dy = 0$

6) $2(u^2 + uv)du + (u^2 + v^2)dv = 0$

7) $(2xy\,e^{x^2y} + y^2\,e^{xy^2} + 1)dx + (x^2\,e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y)dy = 0$

จงหาตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตและหาผลเฉลยของสมการต่อไปนี้ ในข้อ 8) ถึง 11)

8) $(2y - 3x)\,dx + x\,dy = 0$

9) $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

10) $(y^2\cos x - y)\,dx + (x + y^2)\,dy = 0$

11) $\cos x\,dy + (2y\sin x - 3)\,dx = 0$

12) จงแสดงว่า สมการเอกพันธ์ $(Ax^2 + Bxy + Cy^2)\,dx + (Dx^2 + Exy + Fy^2)\,dy = 0$ จะเป็นสมการแม่นตรง ก็ต่อเมื่อ $B = 2D$ และ $E = 2C$

13) ถ้า $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธ์ และ $xM(x,y) + yN(x,y) \neq 0$ แล้วจงพิสูจน์ว่า $\dfrac{1}{xM(x,y) + yN(x,y)}$ เป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตของสมการเอกพันธ์

14)จงหาเงื่อนไขที่จำเป็น สำหรับฟังก์ชัน M(x,y) และ N(x,y) ที่ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

มีตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตเป็นฟังก์ชันของ $x + y$ จากนั้นจงหาตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตและ

หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (5x2+2xy+3y3) dx + 3(x2+xy2+2y3) dy = 0

15) จงแสดงว่า ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ มีคุณสมบัติว่า

$\dfrac{1}{xM(x,y) + yN(x,y)}\left[\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันของ xy แล้ว ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตคือ

$e^{\int f(u)du}$ เมื่อ $u = xy$ จากนั้นจงหาตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตและหาผลเฉลยของ

สมการเชิงอนุพันธ์ $(y^2 + xy + 1)\,dx + (x^2 + xy + 1)\,dy = 0$

2.5 สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง และ สมการแบร์นูลลี (First order Linear Equations and Bernoulli Equations)

จากนิยาม 1.6 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n คือสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = f(x) \qquad (15)$$

เมื่อ $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, ... , $a_0(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงใดช่วงหนึ่งของจำนวนจริง และ $a_n(x) \neq 0$

ดังนั้น เมื่อ n = 1 สมการ(15) จะกลายเป็น $a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = f(x) \qquad (16)$

เมื่อ $a_1(x)$, $a_0(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงใดช่วงหนึ่งของจำนวนจริง และ $a_1(x) \neq 0$

เมื่อ $a_1(x) \neq 0$ จะจัดสมการ(16) ใหม่เป็น $y' + \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}\,y = \dfrac{f(x)}{a_1(x)}$

หรือ $y' + P(x)\,y = Q(x)$ เมื่อ $P(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$ และ $Q(x) = \dfrac{f(x)}{a_1(x)}$

ทฤษฎีบท2.5.1 $e^{\int P(x)dx}$ จะเป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตของสมการเชิงเส้น

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (17)$$

และผลเฉลยของสมการ คือ $y = e^{\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right]$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

พิสูจน์ จัดสมการ(17) จะได้ $(P(x)y - Q(x))dx + dy = 0 \qquad (18)$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial}{\partial y}(P(x)y - Q(x)) = P(x)$ และ $\dfrac{\partial 1}{\partial x} = 0$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 2.4.2 จะได้ $e^{\int P(x)dx}$ เป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตของสมการ (18)

จึงได้ว่า $(P(x)y - Q(x))\,e^{\int P(x)dx}\,dx + e^{\int P(x)dx}\,dy = 0$

เป็นสมการแม่นตรง จัดรูปใหม่จะได้

$$e^{\int P(x)dx}dy + P(x)\,y\,e^{\int P(x)dx}dx - Q(x)\,e^{\int P(x)dx}\,dx = 0$$

$$d\left(y\,e^{\int P(x)dx}\right) - Q(x)\,e^{\int P(x)dx}\,dx = 0$$

$$y\,e^{\int P(x)dx} - \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = C$$

ดังนั้น $y = e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right\}$

จึงเป็นคำตอบของสมการเชิงเส้น $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ #

ตัวอย่าง 2.5.1 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$ (19)

วิธีทำ ในที่นี้ $P(x) = 2x$ และ $\int P(x)dx = x^2$

ดังนั้นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตคือ e^{x^2} นำไปคูณสมการ (19)

จะได้

$$
\begin{aligned}
e^{x^2} dy + (2xy - 4x)e^{x^2} dx &= 0 \\
e^{x^2} dy + 2xy e^{x^2} dx - 4x e^{x^2} dx &= 0 \\
d(y e^{x^2}) &= \int 4xe^{x^2} dx \\
y e^{x^2} &= 2 e^{x^2} + C \\
y &= 2 + C e^{-x^2}
\end{aligned}
$$

หรือจะหาจากสูตร

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-\int P(x)dx} \{ \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \} \\
&= e^{-x^2} \left\lfloor \int 4xe^{x^2} dx + c \right\rfloor \\
&= e^{-x^2} \left\lfloor 2e^{x^2} + c \right\rfloor \\
&= 2 + C e^{-x^2}
\end{aligned}
$$
#

ตัวอย่าง 2.5.2 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $x\frac{dy}{dx} = y + x^3 + 3x^2 - 2x$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ ได้ $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2 + 3x - 2$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\int P(x)dx &= \int -\frac{1}{x} dx = -\ln x \\
e^{\int P(x)dx} &= e^{-\ln x} = \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

ดังนั้นผลเฉลยคือ

$$
\begin{aligned}
y &= e^{\ln x} \left(\int \frac{1}{x}\left(x^2 + 3x - 2)dx\right) + C \right) \\
&= x \left(\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right) \\
&= \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x \ln x + Cx
\end{aligned}
$$
#

สมการของเบอร์นูลลี (Bernoulli's Equations)

สมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^{n}$ (20)

เมื่อ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะเรียกว่า **สมการของเบอร์นูลลี**

ซึ่ง สมการของเบอร์นูลลี ในกรณีที่ n = 0 หรือ 1 จะเป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง ในกรณีที่ $n \neq 1$ สมการเบอร์นูลลี สามารถเปลี่ยนเป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งได้โดย

เปลี่ยน สมการ (20) เป็น $y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{1-n}P(x) = Q(x)$ (21)

ให้ $v = y^{1-n}$ ดังนั้น $\frac{dv}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}$

แทนในสมการ(21)จะได้ $\left(\frac{1}{1-n}\right)\frac{dv}{dx} + P(x)\,v = Q(x)$

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)\,P(x)\,v = (1-n)Q(x)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งในตัวแปร x และ v

ตัวอย่าง 2.5.3 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} + y = xy^{3}$ (22)

วิธีทำ จัดสมการ(22)ใหม่เป็น $y^{-3}\frac{dy}{dx} + y\text{-}2 = x$ (23)

ให้ $v = y^{-2}$ ดังนั้น $\frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$

แทนในสมการ(23) ได้ $\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{dv}{dx} + v = x$

$$\frac{dv}{dx} - 2v = -2x$$

ดังนั้น
$$v = e^{2x}\left[\int(-2x)e^{\int(-2)dx}dx + C\right]$$
$$= x + \frac{1}{2} + c\,e^{2x}$$

แต่ $v = y^{-2}$ ดังนั้น ผลเฉลยคือ

$$\frac{1}{y^{2}} = x + \frac{1}{2} + c\,e^{2x}$$ #

แบบฝึกหัด 2.5

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1) $(x - 2)\dfrac{dy}{dx} = y + 2(x - 2)^3$

2) $x^3 \dfrac{dy}{dx} + (2 - 3x^2)y = x^3$

3) $y \ln y \, dx + (x - \ln y)dy = 0$

4) $\dfrac{dy}{dx} - y = xy^5$

5) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$

6) $\dfrac{dy}{dx} + y = y^2(\cos x - \sin x)$

7) $\dfrac{dy}{dx} + y \tan x = \cos x$

8) $\cos t \, dr + (r \sin t - \cos^4 t)\, dt = 0$

9) $x\, dy - \{ y + xy^3(1 + \ln x)\}\, dx = 0$

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ตามเงื่อนไขที่กำหนด

10) $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2 y = x2$, $y(0) = 2$

11) $2x(y + 1)\, dx - (x^2 + 1)\, dy = 0$, $y(1) = -5$

12) $x\dfrac{dy}{dx} + y = \sqrt{(xy)^3}$, $y(1) = 4$

13) $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{if } x \ge 1 \end{cases}$ โดยที่ $y(0) = 0$

14) $(x + 2)\dfrac{dy}{dx} + y = f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 \le x < 2 \\ 4 & \text{if } x \ge 2 \end{cases}$ โดยที่ $y(0) = 4$